УДК 51(075)
Б24

Серія «Олімпіади»
Заснована 2005 року

Баран О. І., Васильєва Л. Я.

Б24 Задачі для олімпіад, конкурсів, змагань. Математика. 6–11 класи. / О. І. Баран, Л. Я. Васильєва — Х. : Видавнича група «Основа», 2020. — 239, [1] с. — (Серія «Олімпіади»)

ISBN 978-617-00-3919-4.

Запропонований збірник задач уміщує завдання другого і третього турів Миколаївських математичних олімпіад. Матеріали посібника можуть стати в пригоді під час підготовки учнів до математичних олімпіад під керівництвом викладача або при індивідуальній роботі. Для всіх задач наведені розв'язання або вказівки, відповіді.

Для учнів 5–11 класів середніх навчальних закладів усіх типів, які цікавляться проблемами підготовки до математичних змагань, а також для вчителів математики і керівників математичних гуртків.

УДК 51(075)

ISBN 978-617-00-3919-4

Зміст

Передмова

Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо ступайте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!

Д. Пойа

Перші Олімпіади проводились ще в Стародавній Греції як змагання у спритності, силі, красі. За однією з легенд, Олімпійські Ігри у Стародавній Греції започаткував Геракл на пам'ять про свого друга Пелопа. У 776 році до н. е. ці ігри були поновлені й відбувалися на початку червня кожного четвертого року.

Легенди розповідають, що уславлений давньогрецький філософ і математик Піфагор приділяв велику увагу гігієні і здоров'ю, брав участь у кулачному бою на 58-й Олімпіаді, яка проходила в 548 році до н. е. Через малий зріст Піфагора судді не хотіли допускати його до змагання, але вчений домігся свого і навіть став чемпіоном з цього виду змагань та утримував цей титул ще на кількох наступних олімпіадах. Коли друзі Піфагора дивувались з приводу його спортивних захоплень, він відповідав: «Якщо не робити перерву в наукових заняттях, цінні думки не прийдуть у стомлену голову».

Відомо також, що й Ератосфен займався не тільки точними науками — він був відомим поетом, оратором, брав участь у олімпійських іграх і начебто був переможцем у п'ятиборстві.

Близько 264 року до н. е. історик Тімей навіть увів літочислення за Олімпійськими іграми. А перші Олімпійські ігри сучасності пройшли в Афінах у 1896 році...

Але різноманітні змагання проводилися не тільки в спорті. Добре відома любов до змагань у розв'язанні задач у багатьох країнах світу. Математичні змагання з розв'язання задач, за аналогією зі спортивними змаганнями, також називають олімпіадами.

У Росії конкурси із розв'язання задач почали проводитися з 1886 року, в Угорщині та Румунії — з 1894 року, в інших країнах значно пізніше.

Особливого розвитку олімпійські математичні змагання набули в СРСР. Першу таку олімпіаду організували вчені Ленінграда ще в 1934 році для учнів старших класів ленінградських шкіл. А вже наступного року на математичних змаганнях зустрічалися школярі в Москві, Ленінграді та Києві.

Отже, в Україні першу математичну олімпіаду було проведено в червні 1935 року. Журі олімпіади очолював відомий український математик, академік М. П. Кравчук (1892–1942). 4 червня, у день відкриття олімпіади, він виступив перед учнями і вчителями київських шкіл із промовою «Про завдання і методи математичних наук».

У 1960 році була проведена експериментальна олімпіада. А з 1961 року олімпіади в масштабі всієї країни стали організовуватися регулярно. Із цього часу в змаганнях незмінно брали участь і учні Миколаєва та Миколаївської області. Із 1967 року ці змагання стали називатися Всесоюзними математичними олімпіадами.

Перша Міжнародна математична олімпіада була проведена в Румунії в 1959 році. З того часу команди юних математиків Радянського Союзу (а тепер і України) незмінно посідають у цих змаганнях найвищі місця.

1991 року Україна стала незалежною державою, і з цього часу відбуваються Всеукраїнські олімпіади юних математиків. Активно впроваджуються та розвиваються математичні олімпіади й на Миколаївщині. Зусиллями багатьох ентузіастів (серед яких чимало досвідчених учителів, відомих науковців, аспірантів, студентів) миколаївські математичні олімпіади сприяли пошуку і творчому розвитку обдарованих школярів області. Багато учнів Миколаївщини в різні роки ставали переможцями республіканських і міжнародних змагань, а в подальшому — видатними вченими-математиками.

Завдання математичної олімпіади зазвичай готують авторитетні фахівці-математики Миколаївщини. За минулі десятиліття утворився значний банк таких завдань. Саме ці завдання, із розв'язаннями та відповідями, складають основну частину посібника. Більшість задач є нестандартними, деякі авторські або створені на основі відомих типів олімпіадних задач.

Необхідно також наголосити, що наведені задачі мають проміжний рівень складності. Тобто вони розраховані на переважну більшість учнів середніх навчальних закладів, які цікавляться математикою й самостійно працюють над підвищенням свого рівня знань у цій галузі.

У математичних змаганнях зазвичай беруть участь здібні й зацікавлені учні. Але при цьому цілком зрозуміло, що ніякі здібності не допоможуть досягти бажаних результатів у змаганнях без систематичної й повсякденної роботи.

Учням далеко не байдуже, які саме задачі і вправи пропонуються їм для розв'язання. Вони одержують більше задоволення у процесі навчання, якщо їм вдається розв'язати задачу, що пропонувалася на математичних змаганнях, олімпіадах або на вступних іспитах до вищих навчальних закладів. Тому завдання минулих математичних олімпіад можна розглядати як ефективний дидактичний матеріал. У процесі їх розв'язування учні мають більше можливостей швидше засвоїти основні методи й алгоритми, відчути впевненість у своїх можливостях.

На жаль, для тих, хто складає задачі математичних олімпіад, і на щастя тих, хто їх розв'язує, нові ідеї й методи в цій галузі виникають не так часто. Тому освоєння цих ідей і методів, уміння їх ефективно використовувати на практиці залишається важливою складовою підготовки майбутніх олімпійців. Саме таким завданням і присвячена ця книга.

***О. М. Хіміч**, заступник директора Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, член-кореспондент НАН України, лауреат Державних премій України в галузі науки та техніки і педагогіки, професор, доктор фізико-математичних наук*

Всеукраїнські олімпіади юних математиків проводяться в чотири тури:

перший тур — шкільний;

другий тур — районний (міський);

третій тур — обласний;

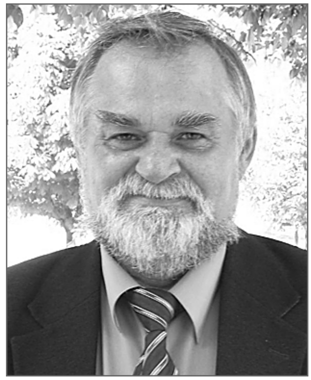
четвертий тур — республіканський.

Запропонований збірник задач уміщує переважно завдання другого і третього турів математичних олімпіад. Матеріали посібника можуть стати в нагоді під час підготовки учнів до математичних олімпіад під керівництвом викладача або при індивідуальній роботі.

Навчити учня мислити — означає зробити для нього значно більше, ніж надати йому певну кількість інструкцій.

Чарльз Беббідж

Близько 35 років незмінним головою журі Миколаївських обласних олімпіад залишався **Валентин Миколайович Лейфура**. В. М. Лейфура зробив значний внесок у розвиток і підвищення рівня математичних змагань на Миколаївщині. Він складав завдання третього туру змагань і готував команду на республіканську олімпіаду, кращі учні мали змогу під його керівництвом займатися в літній математичній школі.



В. М. Лейфура

Тривалий час В. М. Лейфура був членом журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків (1982–2001), заступником голови журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, науковим керівником національної команди України на Міжнародних математичних олімпіадах у Токіо (2003), Афінах (2004), Мехіко (2005), Спліті (2006).

В. М. Лейфура народився 9 серпня 1947 року в селищі міського типу Березанка на Миколаївщині. 1963 року закінчив вісім класів Березанської середньої школи і на конкурсній основі вступив до Київської спеціалізованої школи-інтернату фізико-математичного профілю при Київському державному університеті. 1966 року В. М. Лейфура став студентом фізико-математичного факультету Миколаївського державного педагогічного інституту і в 1970 році одержав диплом учителя фізики середньої школи.

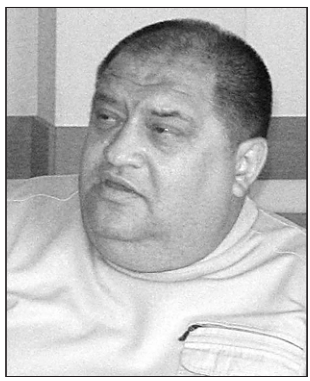
У 1970–1973 роках працював учителем математики та фізики Березанської середньої школи Миколаївської області. У 1973–1976 роках — аспірант кафедри вищої математики Київського педагогічного інституту за спеціальністю «Диференціальні й інтегральні рівняння». За призначенням Міністерства освіти, після закінченням аспірантури, з жовтня 1976 року почав працювати в Миколаївському державному педагогічному інституті. У березні 1979 року захистив дисертацію на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук. Учене звання доцента одержав у 1983 році, учене звання професора — у 1991 році. У Миколаївському державному педагогічному університеті працював 25 років, із них 20 років — на посаді завідувача кафедри математичного аналізу. 2001 року перейшов на посаду професора кафедри фізико-математичних наук Миколаївської філії Національного університету «Києво-Могилянська академія», а з 2002 року очолив цю кафедру.

Значну увагу Валентин Миколайович завжди приділяв не тільки математичному «спорту», але й залученню юнацтва до основ суто наукової роботи в галузі математики. Ідеться про таку важливу форму навчання школярів, як Мала Академія наук. Професор Лейфура очолював журі з математики Миколаївського територіального відділення МАН, підготував з учнями багато цікавих математичних робіт, автори яких посідали високі місця на Всеукраїнських конкурсах-захистах.

В. М. Лейфура написав самостійно і у співавторстві декілька десятків друкованих робіт для математично обдарованих учнів, серед яких привертають увагу такі книги, як «Математичні задачі евристичного характеру», «Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування», «Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000», «Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006», «Задачі з параметрами», численні цікаві статті тощо. В. М. Лейфура був членом редакційної ради журналу «У світі математики», редакційної колегії журналу «Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили», редакційної колегії газети «Математика».

Вагомий внесок Валентина Миколайовича Лейфури в розвиток національної освіти відзначений високими державними, урядовими та галузевими нагородами. Указом Президента України йому було присвоєне почесне звання «Заслужений вчитель України». В. М. Лейфура нагороджений Почесною грамотою Кабінету Міністрів України, медаллю імені Петра Могили Міністерства освіти і науки України, знаками «Відмінник народної освіти УРСР», «Відмінник освіти України», «Софія Русова», почесними грамотами МОН України, відзнакою Благодійного фонду «Україна — дітям». 2002 року мешканці міста Миколаєва визнали Валентина Миколайовича Людиною Року в освітній номінації.

Значний внесок у розвиток математичної освіти також зробив видатний миколаївський педагог-математик **Олександр Володимирович Гримайло**. Протягом багатьох років він брав участь в організації і проведенні математичних змагань різного рівня на Миколаївщині. Незмінно був членом журі математичних олімпіад і турнірів, розробляв і очолював обласну команду юних математиків, готував завдання до олімпіад і математичних турнірів. Йому належать друковані праці з олімпіадної тематики, його учні незмінно посідали високі місця на обласних і республіканських змаганнях юних математиків.



О. В. Гримайло під час аналізу завдань Республіканського математичного турніру (Миколаїв, 2010)

Світлій пам'яті ***Валентина Миколайовича Лейфури*** *і* ***Олександра Володимировича Гримайла*** *автори присвячують цю книгу.*

6 клас

1 Потяг довжиною 18 м проїжджає повз кілометровий стовп за 9 с. Скільки часу йому потрібно, щоб проїхати міст довжиною 36 м?

Відповідь. Потяг проїде міст за 27 с (9 с потяг в'їжджає на міст, ще через 9 с він досягає кінця мосту і ще 9 с з'їжджає з мосту).

2 Добуток чотирьох послідовних чисел дорівнює 7920. Знайдіть ці числа.

Відповідь. $7920 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$. ***Указівка.*** Достатньо врахувати, що число 7920 ділиться на 9 і на 11.

3 Є 101 монета. Серед них 100 однакових справжніх монет і одна фальшива, яка відрізняється від них вагою. Необхідно з'ясувати, легша чи важча фальшива монета. Як це зробити за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир?

Розв'язання. Зважимо монети 50 на 50. Якщо маса купок виявиться однаковою, то фальшивою є 101-а монета, другим зважуванням просто порівняємо її вагу з вагою будь-якої справжньої. Якщо маса різна, розіб'ємо «важку» купку навпіл і зважимо монети 25 на 25. Якщо купки важать однаково, то ці монети справжні й фальшива була в легкій купці, отже, вона легша за справжню, а якщо по-різному, то фальшива монета у важкій купці, отже, вона важча, ніж справжня.

4 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{13{,}02}{1{,}223} = \dfrac{x-4}{24{,}46}$.

Відповідь. 264,4.

5 Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води треба долити до 40 кг морської, щоб в останній було 2 % солі?

Відповідь. 60 кг.

6 У коробці є 15 кульок: білі, червоні та чорні. Кількість білих кульок у 7 разів більша, ніж червоних. Скільки чорних кульок у коробці?

Розв'язання. Нехай x — кількість червоних кульок, $7x$ — кількість білих кульок, y — кількість чорних кульок. За умовою задачі складемо рівняння: $x + 7x + y = 15$, $8x + y = 15$.

Оскільки x, y — натуральні числа, то $x=1$ — єдиний можливий розв'язок, тоді $y=7$.

Відповідь. 7 кульок.

7 На чудо-дереві садівник виростив 1999 бананів і 2000 апельсинів. Щодня він зривав два плоди, а на їх місці виростав новий, причому, якщо він зривав два однакові фрукти, то виростав апельсин, а якщо два різні, то виростав банан. Яким може бути останній фрукт на цьому дереві?

Розв'язання. Кількість бананів — число непарне. У результаті зривання будь-якої пари плодів воно залишається непарним. Тому єдиний фрукт, який залишився, може бути лише бананом.

Відповідь. Банан.

8 Ділянка прямокутної форми огороджена парканом. Через кожні 2 м паркану зарито стовп. Скільки всього стовпів у паркані, якщо довжина однієї сторони ділянки дорівнює 80 м, а довжина другої на 40 м більша?

Розв'язання. $P_{ABCD}=2(80+120)=400$ м, а для поділу відрізка такої довжини потрібно 201 стовпчик, але перший і останній збігаються.

Відповідь. 200.

9 Троє друзів зібрали горіхи й лягли спати. Один із них прокинувся і з'їв третину горіхів. Потім прокинувся другий і, нічого не знаючи про першого, з'їв третину горіхів, які залишились. Потім теж саме зробив і третій. На ранок виявилося, що залишилось 16 горіхів. Скільки горіхів було спочатку?

Відповідь. 54.

10 Обмінний автомат обмінює одну монету на сім інших. Чи можна, використовуючи декілька розмінів, одну монету розміняти на 50 інших?

Розв'язання. Після кожного обміну кількість монет збільшується на 6, тобто кількість монет після обміну можна подати у вигляді $1+6n$, але число 50 у такому вигляді подати не можна.

Відповідь. Не можна.

11 На столі лежать 2000 сірників. Грають двоє. За один хід дозволяється взяти не більше ніж половину сірників, які лежать на столі. Програє той, хто не зможе зробити свій черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу і як він повинен грати?

Розв'язання. Перший гравець має після свого ходу залишити 2^n-1 сірників (першим ходом він візьме 977 сірників і залишить

$2^{10}-1=1023$ сірники). Тоді після десятого ходу першого гравця на столі залишиться 1 сірник і другий не зможе зробити хід.

Відповідь. У першого.

12 У кошику лежать менше ніж 100 яблук, і їх можна поділити порівну між 2, 3 або 5 учнями, але не можна поділити між чотирма учнями. Скільки яблук у кошику?

Відповідь. 30 або 90.

13 Знайдіть усі трицифрові числа, які в 12 разів більші за суму своїх цифр.

Відповідь. $100a+10b+c=12(a+b+c)$. Це число 108.

14 Після того як Катя з'їла половину яблук із банки компоту, рівень компоту знизився на $\frac{1}{3}$. На яку частину (від одержаного рівня) знизиться рівень компоту, якщо з'їсти половину яблук, які залишилися?

Розв'язання. Половина яблук становить $\frac{1}{3}$ об'єму банки. Отже, половину яблук, які залишились, становить число $\frac{1}{6}$ від $\frac{2}{3}$. Тому $\frac{1}{6}:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$.

Відповідь. На $\frac{1}{4}$.

15 На столі стоять 7 склянок. Усі — догори дном. Дозволяється за один хід перевернути 4 склянки. Чи можна за декілька ходів домогтися, щоб усі склянки стояли правильно?

Відповідь. Ні. Парність кількості склянок, які стоять догори дном, є інваріантою.

16 Комп'ютерний вірус кожного дня знищує певну частину інформації на жорсткому диску. Протягом першого дня вірус знищив половину всієї інформації, протягом другого — $\frac{1}{3}$ того, що залишилося. Протягом третього дня вірус знищив $\frac{1}{4}$ того, що залишилося, на четвертий день — $\frac{1}{5}$ решти. Яка частина початкового об'єму інформації залишилася?

Розв'язання. Найменше спільне кратне чисел 2, 3, 4, 5 дорівнює 60. Позначимо через $60V$ початковий об'єм інформації на ще не знищеному диску. Тоді після першого дня залишилося $30V$, після другого — $20V$, після третього — $15V$ і після четвертого — $12V$. Отже, відношення вцілілої частини інформації до початкового об’єму дорівнює $\frac{12V}{60V} = \frac{1}{5}$.

Відповідь. $\frac{1}{5}$.

17 Двоє гравців по черзі дістають зі скриньки кульки. Програє той, хто забирає останню кульку. Хто може забезпечити собі перемогу, перший чи другий, якщо спочатку в скриньці було 2002 кульки і за один хід можна виймати не менше ніж одну і не більше ніж п’ять кульок?

Розв’язання. Виграє перший, якщо першим ходом забере 3 кульки, за кожен наступний хід він повинен брати стільки кульок, щоб у сумі з кульками, які взяв другий, було б 6 кульок, у кінці гри залишиться одна кулька, яка дістанеться другому.

18 Було 7 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 8 частин, потім деякі з одержаних частин розрізали ще на 8 частин тощо. Чи може на деякому етапі загальна кількість шматків паперу дорівнювати 2002?

Розв’язання. Може, після кожного такого розрізання загальна кількість шматків паперу збільшується на 7, а $2002 : 7 = 286$. Отже, це станеться після 285 таких розрізань.

Відповідь. Так.

19 У класі навчаються 37 учнів. Доведіть, що хоча б четверо з них святкують день народження протягом одного місяця.

Указівка. Застосуйте принцип Діріхле.

20 У літньому таборі 96 дітей мають поділитися на декілька груп з однаковою кількістю дітей у кожній. Скількома різними способами (способи вважаються різними, якщо вони відрізняються кількістю дітей у групах) вони можуть це зробити, якщо кожна група повинна містити більше ніж 5 дітей, але менше ніж 20?

Розв’язання. Кількість дітей у групі повинна бути дільником числа 96. Можливі дільники, які задовольняють умови задачі, — це 6, 8, 12 і 16.

Відповідь. 4 способами.

21 На склад надійшло 100 кг грибів. Аналіз показав, що в грибах 99 % води. Через деякий час аналіз повторили. Виявилось, що води стало 98 %. Яка тепер маса грибів?

Відповідь. 50 кг.

22 До ліфту, вантажопідйомність якого становить 320 кг, підійшло 12 осіб, загальною масою 960 кг. Доведіть, що з них можна вибрати 4 особи, які разом зможуть піднятися цим ліфтом.

Доведення. Треба скористатися принципом Діріхле. Якщо всіх пасажирів ліфта умовно поділити на 3 групи по 4 особи, то принаймні в одній групі загальна вага всіх пасажирів групи буде не більша ніж 320 кг.

23 У важких боях 100 піратів одержали тяжкі поранення: 70 з них — втратили одну ногу, 75 — одну руку, 80 — одне око і 85 — одне вухо. Яку при цьому найменшу кількість могли становити пірати, які втратили одночасно і ногу, і руку, і око, і вухо?

Розв'язання

Спосіб 1. Усього якесь каліцтво одержали $70+75+80+85=310$ піратів. Але їх було всього 100, тобто, за принципом Діріхле, принаймні 10 із них втратили і ногу, і руку, і око, і вухо.

Спосіб 2. $70+75=145$ піратів втратили ногу або руку, тобто принаймні 45 із них втратили і ногу, і руку. Далі: $45+80=125$, тобто принаймні 25 піратів втратили ногу, руку й око. Тепер маємо: $25+85=110$, тобто принаймні 10 піратів понесли всі можливі втрати.

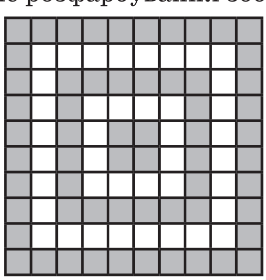
24 Четверо білочок з'їли 2005 горішків, причому кожна з'їла не менше ніж 100. Перша білочка з'їла більше, ніж інші. Друга й третя з'їли разом 1269 горішків. Скільки горішків з'їла перша білочка?

Розв'язання. Оскільки перша білочка з'їла найбільше горішків, а друга і третя з'їли 1269 горішків, то перша білочка з'їла не менше ніж 636 горішків. Оскільки четверта білочка з'їла не менше ніж 100 горішків, то перша з'їла не більше ніж $2005-1269-100=636$ горішків. Отже, перша білочка з'їла 636 горішків.

Відповідь. 636 горішків.

25 Зафарбуйте декілька клітинок у квадраті 10×10 так, щоб у кожної клітинці було рівно дві сусідні за стороною зафарбовані клітинки.

Розв'язання. Шукане розфарбування зображено на *рисунку*.



26 Тетянка сказала: «У Андрійка більше ніж сто книг». Данилко заперечив: «Ні, менше». Марійка сказала: «Ну, хоча б одна книга в нього напевне є». Скільки книг може бути в Андрійка, якщо з цих трьох тверджень тільки одне істинне?

Розв'язання. Можливі три випадки: правду сказала або Тетянка, або Данилко, або Марійка. Якщо правду сказала Тетянка, то Марійка теж сказала правду, що суперечить умові. Отже, цей випадок не можливий. Якщо правду сказала Марійка, то Тетянка й Данилко повинні сказати неправду. Це можливо, якщо в Андрійка рівно 100 книг. Якщо правду сказав Данилко, то твердження Тетянки й Марійки хибні. Це можливо, якщо в Андрійка книг немає.

Відповідь. 0 або 100.

27 Маємо 2004 сірники. За один хід можна взяти будь-яку кількість від 1 до 5 сірників. Грають двоє. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з двох гравців — перший чи другий, може забезпечити собі виграш?

Розв'язання. Виграє другий гравець: він повинен доповнювати ходи першого гравця до 6 сірників ($2004 : 6 = 334$).

Відповідь. Другий гравець.

28 Доведіть, що серед довільних 2005 натуральних чисел знайдуться два такі, що їхня різниця ділиться на 2004.

Доведення. У результаті ділення числа на 2004 остача може дорівнювати 0, 1, 2, ..., 2003 — усього 2004 різних варіантів. Тому, за принципом Діріхле, серед 2005 чисел знайдуться принаймні два, які дають однакову остачу в результаті ділення на 2004, а їхня різниця буде ділитися на 2004 без остачі.

29 Знайдіть значення дробу $\dfrac{У \times К \times Р \times А \times Ї \times Н \times А}{Є \times В \times Р \times О \times П \times А}$, де різні букви — це різні цифри, між якими стоять знаки множення.

Розв'язання. Різних букв у цьому виразі десять, тобто серед них є і нуль. Але на нуль ділити не можна, тому нуль може стояти тільки в чисельнику дробу. Отже, чисельник дробу й цей дріб дорівнюють нулю.

Відповідь. 0.

30 Учитель записав на аркуші паперу число 20. Тридцять три учні передають аркуш одне одному, і кожен за бажанням додає або віднімає від числа одиницю. Чи можна в результаті одержати число 10?

Відповідь. Ні. ***Указівка.*** Урахуйте парність.

31 Голодні Вінні-Пух і П'ятачок з'їли мед із горщика і стали ситими. Відомо, що мед із горщика легший від голодного П'ятачка, а ситий Вінні-Пух важить стільки ж, скільки два голодні П'ятачки. Хто важить більше: голодний Вінні-Пух чи ситий П'ятачок? Не забудьте обґрунтувати свою відповідь.

Відповідь. Голодний Вінні-Пух важить більше.

32 У школі, де вчиться більше ніж 225, але менше ніж 245 учнів, частина учнів є відмінниками, а інші хорошистами. Після складної контрольної роботи $\frac{2}{7}$ відмінників стали хорошистами, а хорошисти так і залишились хорошистами за винятком одного учня, який став трієчником. При цьому хорошистів і відмінників стало порівну. Скільки учнів могло бути в школі? Наведіть усі можливі варіанти відповіді.

Розв'язання. Розділимо всіх відмінників перед контрольною роботою на 7 рівних груп. Можна вважати, що після написання контрольної роботи двоє учнів з цих груп стали хорошистами, а інші 5 — залишились відмінниками. Тоді хорошистів у школі стало також рівно 5 груп. Разом кількість відмінників і хорошистів ділиться на 10. Отже, з урахуванням трієчника, кількість учнів може бути 231 або 241.

Відповідь. 231 або 241.

33 В одному місті всі жителі розмовляють українською й російською мовами. Українською мовою розмовляють $85\,\%$ усіх жителів, російською — $75\,\%$. Скільки відсотків усіх жителів цього міста розмовляють обома мовами?

Відповідь. $60\,\%$.

34 Десятковий запис двох натуральних чисел містить тільки цифри 1, 4, 6, 9. Чи може одне з цих чисел бути рівно в 3 рази більшим за друге?

Відповідь. Ні, не може. ***Указівка.*** $1\cdot 3=3$, $4\cdot 3=12$, $6\cdot 3=18$, $9\cdot 3=27$. Цю задачу можна також розв'язати за допомогою повного впорядкованого перебору.

35 Чи можна круглий бісквіт (циліндричної форми) розділити на вісім рівних частин за допомогою трьох розрізів. (Перекладати шматки не можна).

Відповідь. Спочатку через центр проводимо два вертикальні взаємно перпендикулярні розрізи, а потім посередині — один горизонтальний.