УДК 514
ББК 22.151
К96

Кушнир И. А.

К96 Эмоциональная геометрия / И. А. Кушнир. — Х. : Изд. группа «Основа», 2016. — 439, [1] с.: ил.

ISBN 978-617-00-2599-9.

Книга известного автора, заслуженного учителя Украины, лауреата журнала «Киевская Русь» в номинации «Кращий літописець сучасності» посвящена школьной геометрии, науке по развитию логического мышления.

В своей новой книге автор представляет ко вниманию геометрические изюминки, которые рассматривает очень эмоционально. Книга будет полезна абитуриентам, участникам математических олимпиад различного уровня, а также всем, кто интересуется геометрией.

УДК 514
ББК 22.151

ISBN 978-617-00-2599-9

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕД ПРЕДИСЛОВИЕМ

ВО ВЕКИ ВЕКОВ

Я люблю всех девять муз. Необходимо искать счастья в как можно большем количестве дам.

Вольтер

Некоторые доказательства, открытые такими людьми, как Лаплас, Лагранж или Эйлер, настолько безукоризненны, что никто из людей уже не сможет найти ничего лучшего для доказательства той же истины.
Но не только эти люди, а и сам Ньютон всё-таки никогда не мог быть уверенным в том, что для какой-нибудь открытой им истины не найдётся ещё лучшего доказательства, чем его собственное.

Николай Чернышевский

Импровизация ... — это прежде всего вопрос внутренней свободы. Каждый профессиональный музыкант в состоянии импровизировать, но нужна та полётность, при которой человек чувствует себя действительно свободно, не боясь нарушить некоторые сложившиеся понятия, не теряя при этом суть произведения.

Ю. Башмет «Возле мечты»

В большинстве наук последующее поколение отбрасывает то, что предыдущее построило; то, что одно установило — другое рушит. И только в математике каждое поколение достраивает новый этаж того же здания.

Герман Ганкель (1839–1873), немецкий математик

НАЧАЛО

Для индивидуальных особенностей математического таланта, так же как для творческого таланта в любой другой области, характерна не столько быстрота выполнения, сколько объём и глубина задуманного и степень врождённой склонности к утончённому. Нельзя забывать, что всякая, даже элементарнейшая математическая выкладка, имеет свой стиль, подобно какому-нибудь другому произведению *искусства; одну и ту же теорему две особы по разному доказывают или решают, и эта индивидуальность отличия обусловлена эстетико-математическим развитием каждого.*

Шпачинский Э. К. * *(1887 г., № 2, 29)*

Великие математики действовали по принципу «Divinez avant de demontrer» («Вначале угадай, а потом докажи»), и это несомненно правда.

Э. Кастнер (1877–1955), американский математик

Нет другой науки, которая бы удивляла своих поклонников столь приятными неожиданностями, что тоже поднимало их шаг за шагом на более высокие ступеньки творческого мышления, как математика.

Джеймс Сильвестр (1814–1897), английский математик

При изучении математики упражнения почти так же необходимы, как при обучении игры на рояле.

Дж. М. Смит (1860–1944), американский математик

Подобно тому, как рою бесконечного количества пчёл, поражающих наперебой своими жалами, не удается отогнать наслаждающегося медведя, если он хоть немного попробовал спрятанного в дереве мёда, так нет точно так же никого, кто хоть краешком губ, познав сладость математических доказательств (какими бы бесконечными громадными трудностями, эти доказательства, не сопровождались), не оттолкнула его, будто частыми уколами жал, не стремился бы всеми силами усвоить их целиком до полного насыщения.

Б. Кавальери (1598–1647), итальянский математик

ЭМОЦИОНАЛЬНОСТЬ «СУХИХ» ФОРМУЛ

... Внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и ЖАРА сконцентрированных в них мыслей.

А. Д. Александров

* * *

Эйлер нисколько не тяготился вычислениями, и никакие формулы, как бы они не были необъятны, никогда не стесняли его: такова была прозорливость Эйлера, что самая громоздкая формула гнулась в его сильных руках как мягкий воск и послушно давала под его усилиями всё, что угадывала в ней его проницательность... В своем поистине изумительном чувстве формул Эйлер не знает себе соперников в наши дни. Его инстинкт алгебраиста и геометра непосредственно

* Шпачинский Э. К. (1848–1912), российский математик и физик, редактор и издатель (до 1898 г.) журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики», который издавался до 1917 г. и был лучшим русским дореволюционным популярным математическим изданием.

чувствовать в формулах истину и ложь, его искусство комбинировать формулы, их оценивать, преобразовывать, мгновенно разгадывать природу результата — были поистине изумительны.
Можно без преувеличения сказать, что в глазах Эйлера математические формулы жили своей собственной жизнью... ему достаточно было прикоснуться к формулам, чтобы они из немых превратились в говорящих и дающих ответы, полные глубокого смысла.

Н. Лузин, российский математик

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эмоциональная геометрия (ЭГ) — это метод преподавания геометрии, основанный на коротких посильных задачах повышенной сложности.

Первый отзыв ученика о хорошем учителе: «Во объясняет!» (поднят вверх большой палец!). Но приходит время, когда внятное объяснение теорем учебника для жаждущего знаний ученика становится скучным (можете не сомневаться, такие ученики есть!) И тогда на помощь приходит задача.

Задача — это, во-первых, трудно (а иначе, что это за задача?!). А, во-вторых, (и это главное) радость победы! Эмоция!

ЭМОЦИЯ ВЫШЕ НАУКИ!

Этот, по сути, задиристый лозунг придуман мной, чтобы обратить внимание на особенность школьного преподавания математики — эмоция, эмоция, эмоция! Математическая эмоция! Как бывает, например, литературная или историческая. Гениальный Гоголь: «... а как дойдёт до Александра Македонского, то начинает стулья ломать».

Я не призываю крушить мебель, хотя, откровенно говоря, завидую гоголевскому учителю истории — это как надо сопереживать походам Великого Александра! Так может только влюблённый в свой предмет Учитель. Ну очень эмоциональный человек!

А у нас? В «скучной» математике? Где Македонский? Где блеск мечей и победные трубы? Есть! Это задачи! И в первую очередь геометрические задачи! Это о них говорят «Жемчужина», «Редкая по красоте!». Они, эти задачи, были созданы гениями три тысячи лет назад, создаются и сегодня, в эти минуты. Их нельзя пропустить. Ведь свою ценность они давно уже доказали, теперь у нас есть возможность не только любоваться ими, а восхищаться и что ещё важнее — учиться. Крохи таких задач собраны в моих книгах, а в этой — новые!

Каждая глава — это новый сюжет, сюжет посильных задач повышенной сложности. Читайте, решайте, наслаждайтесь!

Автор

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Треугольник ABC

a, b, c — стороны BC, AC, AB.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы BAC, ABC, ACB.

R — радиус описанной окружности около треугольника.

r — радиус вписанной окружности.

O — центр описанной окружности.

I — инцентр, центр вписанной окружности.

H — ортоцентр.

M — центроид.

W_i $(i = 1,2,3)$ — точки пересечения биссектрис углов A, B и C с описанной около треугольника окружностью.

r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей.

I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей.

H_i $(i = 1,2,3)$ — основания высот, проведенных из вершин A, B, C.

M_i $(i = 1,2,3)$ — основания медиан, проведенных из вершин A, B и C.

L_i $(i = 1,2,3)$ — основания биссектрис, проведенных из вершин A, B и C.

h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные из вершин A, B и C.

m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные из вершин A, B и C.

l_a, l_b, l_c — биссектрисы, проведенные из вершин A, B и C.

$b_1 = CL_1$, $c_1 = BL_1$.

T_i $(i = 1,2,3)$ — точки касания вневписанной окружности со сторонами треугольника BC, AC, AB.

E_i $(i = 1,2,3)$ — точки Эйлера, середины отрезков AH, BH, CH.

K_i $(i = 1,2,3)$ — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника BC, AC, AB.

R_H — радиус описанной окружности ортоцентрического треугольника.

p — полупериметр треугольника.

p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника.

S — площадь треугольника ABC.

РАЗДЕЛ 1. ПОДНИМЕМ ЗАНАВЕС

ГЛАВА 1.1. СОЛО НА БИССЕКТРИСАХ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА

Ничто не дает математику большего наслаждения, или открытия, что две вещи, которые он раньше считал разными, на самом деле математически идентичны.

В. Сойер

Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями, — лучший математик тот, кто устанавливает аналогии доказательств; более сильный математик тот, кто замечает аналогии теорий, но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии.

Стефан Банах

* * *

Я потерял счет количеству цитирования этого гениального высказывания. Всякий раз уместность мыслей Банаха была неоспоримой.

Но в этот раз аналогия подтвердится как никогда ярко и убедительно в виде удивительной закономерности:

> *Если биссектриса внутреннего угла обладает некоторым свойством, то аналогичным свойством обладает биссектриса соответственного внешнего угла треугольника.*

Более того, аналогичны способы доказательств этих свойств.

Для доказательства этой закономерности я выбрал свою авторскую формулу:

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot M_1N_1, \qquad (*)$$

и доказательство с её помощью формулы Лагранжа $l_a{}^2 = bc - b_1c_1$ (здесь S — площадь треугольника ABC, W_1 — середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC, l_a — биссектриса AL_1, $b_1 = CL_1$, $c_1 = BL_1$, M_1, N_1 — проекции точки L_1 на стороны AC и AB треугольника ABC) (*рис. 1*).

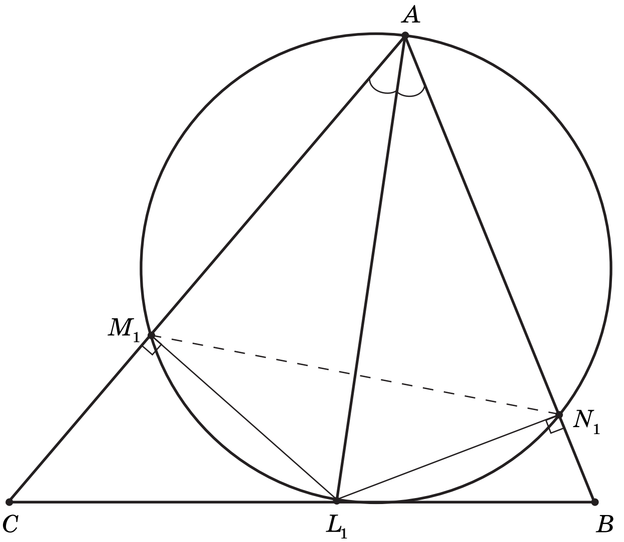

Рис. 1

Поскольку вокруг четырёхугольника $AN_1L_1M_1$ можно описать окружность диаметром AL_1, то $M_1N_1 = l_a \sin A$.

Теперь формулу (*) можно записать в виде

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot l_a \sin A. \tag{1}$$

Докажем её одним из самых простых и остроумных способов. Проведём диаметр W_1D, высоту AH_1 (*рис. 2*).

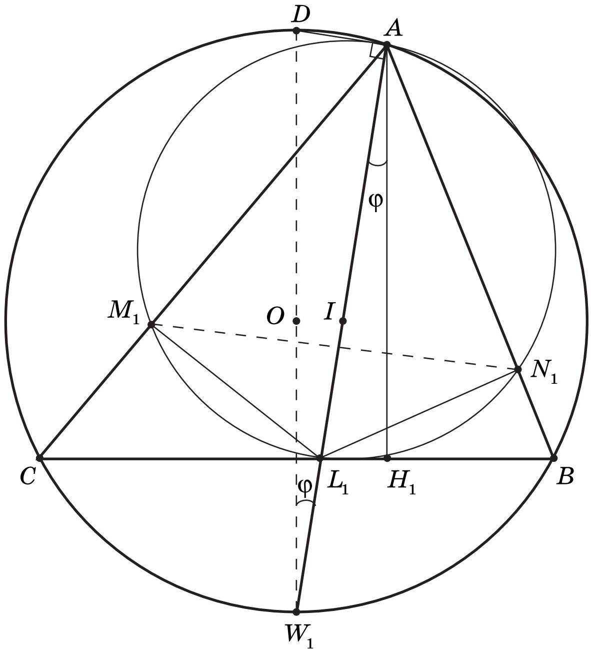

Рис. 2

Обозначим $\angle DW_1A = \varphi$. Из треугольника ADW_1: $AW_1 = 2R\cos\varphi$. Тогда

$$\frac{1}{2}AW_1 \cdot l_a \sin A = \frac{1}{2}\cdot 2R\cos\varphi \cdot l_a \sin A.$$

Но

$$\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\varphi \cdot l_a \sin A = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin A \cdot l_a \cos\varphi. \qquad (1^\circ)$$

Из прямоугольного треугольника AH_1L_1 имеем $l_a \cos\varphi = h_a$. Учитывая, что $2R\sin A = a$, выражение (1°) запишем в виде

$$\frac{1}{2}a \cdot h_a = S.$$

Итак,

$$S = \frac{1}{2}AW_1 \cdot l_a \sin A = \frac{1}{2}AW_1 \cdot M_1N_1.$$

Формула (*) доказана.

Найдём аналог формулы (*) для биссектрисы внешнего угла A $\left(l_a'\right)$. Для этого из основания биссектрисы внешнего угла L_1' опустим на прямые AC и BC перпендикуляры $L_1'M_1'$ и $L_1'N_1'$ (*рис. 3*).

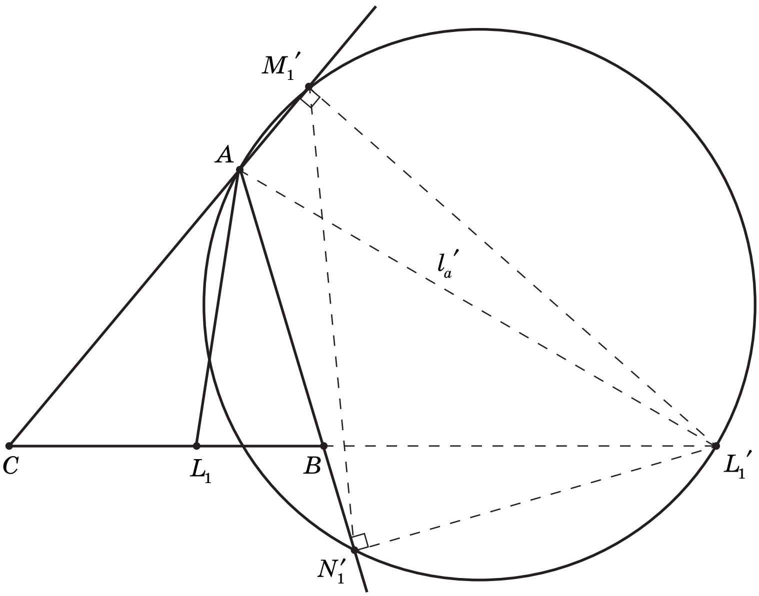

Рис. 3

Заметим, что $M_1'N_1' = l_a' \sin A$. Продолжим отрезок AL_1' до пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью в точке W_1^A (*рис. 4*).

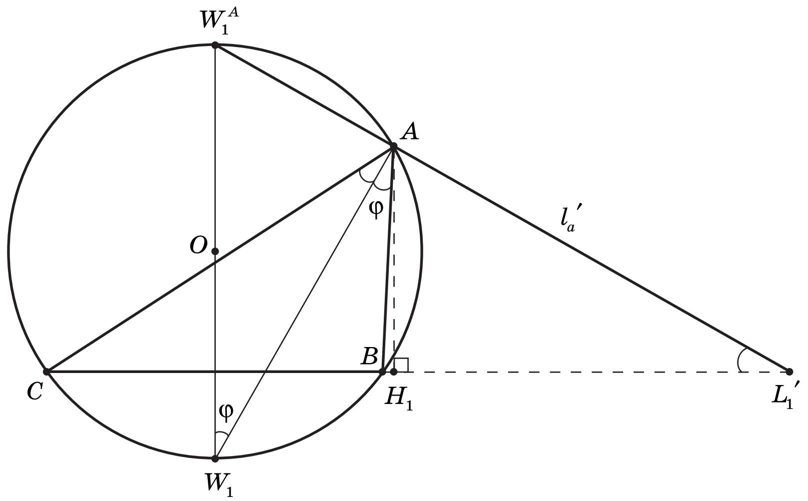

Рис. 4

Поскольку $\angle W_1AW_1^A = 90°$ (смежный углу W_1AL_1'), то $W_1W_1^A$ — диаметр, и точка W_1^A аналогична точке W_1, а потому формулой, аналогичной формуле (*), будет формула:

$$S_{ABC} = S = \frac{1}{2}AW_1^A \cdot M_1N_1', \qquad (**)$$

а формуле (1) будет аналогична формула:

$$S = \frac{1}{2}AW_1^A \cdot l_a' \sin A. \qquad (1')$$

Докажем её способом, аналогичным способу доказательства формулы (1) (т.е. формулы (*)).

Из треугольника $W_1W_1^AA$ (*рис. 4*): $AW_1^A = 2R\sin\varphi$.

Теперь формулу ($1'$) запишем в виде:

$$\frac{1}{2}AW_1^A \cdot l_a' \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\varphi \cdot l_a' \sin A.$$

Вновь поменяем местами множители:

$$\frac{1}{2} \cdot 2R\sin\varphi \cdot l_a' \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin A \cdot l_a' \sin\varphi.$$

Учитывая, что

$$\angle W_1^AW_1A = \angle W_1AH_1 = \angle AL_1'H_1 = \varphi,$$

получаем, что $l_a' \sin\varphi = h_a$, значит,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin A \cdot l_a' \sin\varphi = \frac{1}{2}a \cdot h_a = S.$$

Формула (**) доказана!

И доказана способом, аналогичным способу доказательства формулы (*).

* * *

Продолжим «чудеса аналогии». Авторская формула (*) стала поводом для изящного доказательства формулы Лагранжа:

$$l_a^{\,2} = bc - b_1 c_1, \qquad (\Delta)$$

$$(b_1 = CL_1,\ c_1 = BL_1).$$

Имеем

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot l_a \sin A.$$

Учитывая, что $AW_1 = l_a + L_1W_1$, имеем

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2}\left(l_a + L_1W_1\right) \cdot l_a \sin A, \text{ или } bc = l_a^{\,2} + L_1W_1 \cdot l_a.$$

Но $L_1W_1 \cdot l_a = b_1c_1$ (теорема о произведении отрезков хорд). Значит, $l_a^{\,2} = bc - b_1c_1$ — получим формулу (Δ).

Создадим и докажем формулу Лагранжа (Δ) для биссектрисы l_a' внешнего угла. Применим рассмотренный выше способ (*рис. 5*).

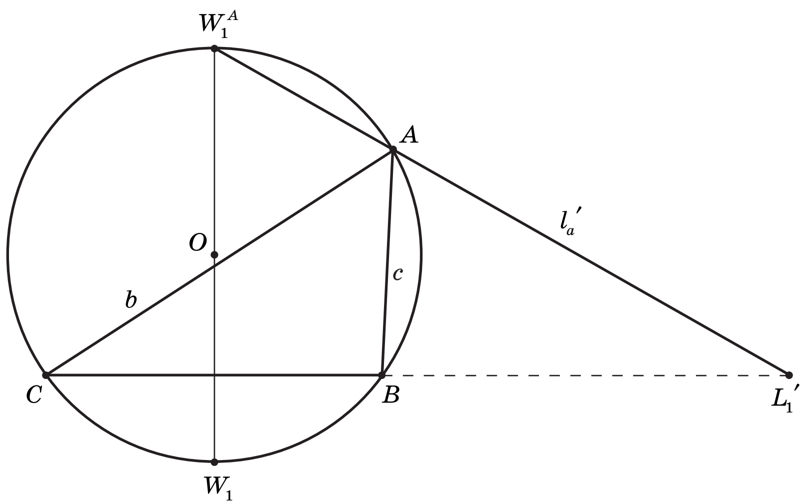

Рис. 5

Очевидно, что $AW_1^A = L_1'W_1^A - l_a'$. Формулу (**) запишем в виде:

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} AW_1^A \cdot l_a' \sin A, \text{ или } bc = AW_1^A \cdot l_a'.$$

Поскольку $AW_1^A = L_1'W_1 - l_a'$, то

$$bc = \left(L_1W_1^A - l_a'\right) l_a', \text{ или } bc = L_1W_1^A l_a' - \left(l_a'\right)^2, \text{ или } \left(l_a'\right)^2 = L_1'W_1^A l_a' - bc. \qquad (2^\circ)$$

Но

$$L_1'W_1^A \cdot l_a' = L_1'C \cdot L_1'B,$$

или

$$L_1'W_1^A \cdot l_a' = b_1'c_1'.$$

Подставим это выражение в формулу ($2°$). Получим

$$\left(l_a'\right)^2 = b_1'c_1' - bc$$

— формула Лагранжа, аналогичная формуле (**).

ГЛАВА 1.2. СЕНСАЦИЯ: НАЙДЕНА САМАЯ ЛУЧШАЯ ЗАДАЧА НА ПОСТРОЕНИЕ

Относительно творчества в искусстве и науке... — это желание оторваться от серости и монотонности будней и найти убежище в мире, заполненном образами, которые мы сами и создали.

А. Эйнштейн

Настораживает вызывающая абсурдность: неужели среди множества задач на построение можно найти лучшую задачу? По каким критериям?

Как говорил выдающийся геометр современности В. А. Скопец (1917–1984) — красивая задача та, которая имеет большее количество способов решений. Выбранная задача имеет шесть (!) содержательных способов решения.

За многолетнюю практику мне не встречалась столь содержательная задача. Чтобы она вновь не потерялась в океане задач на построение, я прибегнул к рекламе. К правдивой рекламе. Потому что эта задача позволяет дотронуться ко многим темам геометрии. Эмоциональной геометрии!

Задача. Построить треугольник ABC по R, r, a, где R — радиус окружности, описанной около треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Имея компоненты R и a, можно найти угол BAC, равный A. Строим окружность радиуса R и в ней проводим хорду длиной a (хорда BC) (*рис. 1*).

Назовём эту окружность окружностью γ. Итак, из всех треугольников со стороной a, вписанных в окружность γ, надо найти такой, чтобы радиус вписанной окружности был равен r. Сделаем это тремя способами.

Итак, *первый способ (сегмент, вмещающий данный угол)!* Пусть I — центр вписанной окружности. Поскольку

$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$$

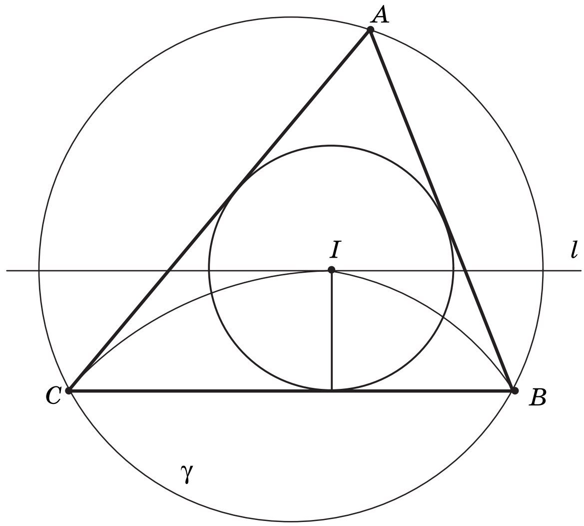

Рис. 1

(докажите!), то на хорде BC строим сегмент, вмещающий угол $90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ (угол A известен, поскольку известны отрезки R и a). Пересечение сегмента прямой l, параллельной BC на расстоянии r, даст точку I (рис. 1).

Второй способ (теорема «трилистника»). Воспользуемся теоремой «трилистника»:

$$BW_1 = IW_1 = CW_1$$

(точка W_1 — середина дуги BC) (*рис. 2*).

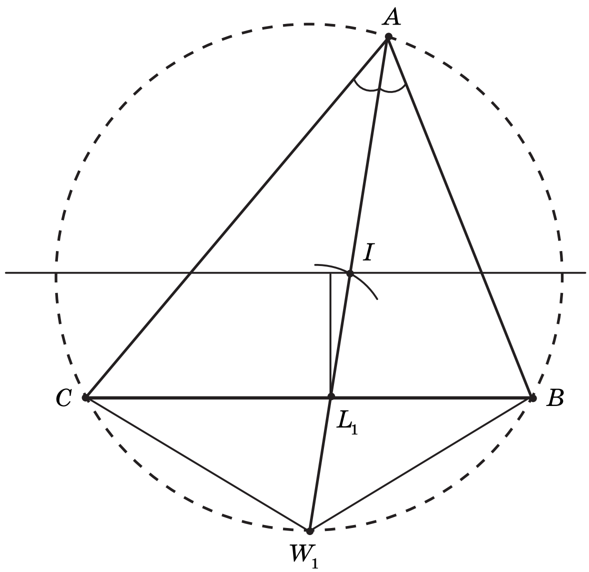

Рис. 2

Имея середину дуги — точку W_1, получаем отрезок трилистника W_1I, а значит, и точку I.

Третий способ (применение формулы Леонарда Эйлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr).$$

Имея отрезки R и r, данные в условии, получим формулу Эйлера

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Отрезок OI построить можно, а значит, и найти точку I.

Четвертый способ (применение формулы: $AI \cdot IW_1 = 2Rr$). Рассмотрим базисный треугольник AIK (K — точка касания вписанной окружности со стороной AB). Его построить можно по катету и острому углу. Получим отрезок AB (*рис. 3*).

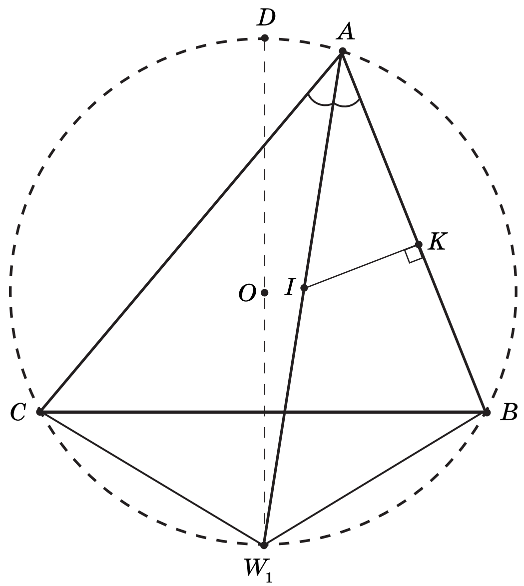

Рис. 3

Поскольку $AI \cdot IW_1 = 2Rr$, то

$$IW_1 = \frac{2Rr}{AI}$$

построить можно, а значит, получена хорда AW_1 ($AW_1 = AI + IW_1$). Имея радиус R, получим центр окружности γ, описанной около треугольника ABC (построим прямоугольный треугольника DW_1A с катетом DW_1 и гипотенузой AW_1, а значит, и треугольник ABC).

Пятый способ (метод спрямления). Получив отрезок $p-a$ (из треугольника AIK) мы получим отрезок p, а значит, отрезок $2p = a+b+c$.

Имея отрезок a, получим отрезок $a+b+c-a = b+c$ и заданная задача сводится к задаче a, A, $b+c$.

Шестой способ (вневписанная окружность). Из треугольника AIK получим отрезок $p-a$. Поскольку отрезок a задан, то задан и периметр $2p$ (полупериметр p).

Имея радиус r, в угол A вписываем окружность с центром I (*рис. 4*) на стороне угла откладываем отрезок $AT = p$ и строим вневписанную окружность, касающуюся прямой AC в точке T.

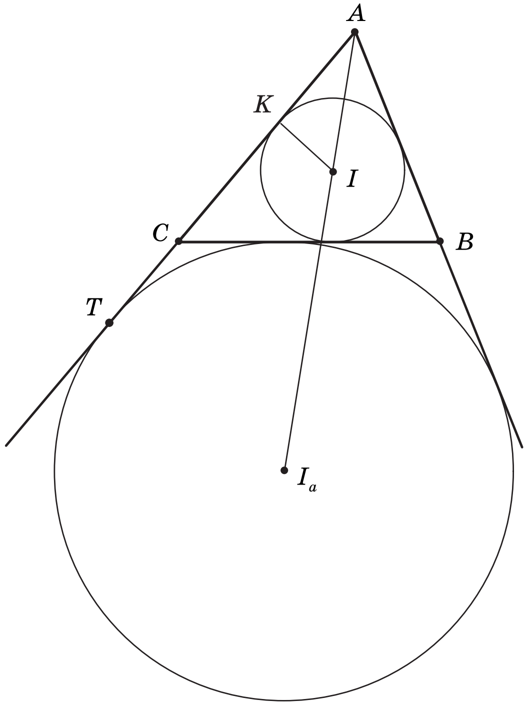

Рис. 4

К построенным окружностям проводим касательную BC.

И, наконец (на конец ли?) самая лучшая задача ещё и самая богатая — и вот почему. В процессе решения выяснилось, что первоначальное условие порождает дополнительные данные, позволяющие построить треугольник ABC.

Перечислим все замеченные: a, $\angle A$, R, r, p, r_a, $b+c$.

Читателям предлагаем брать тройку из них и строить треугольник ABC. Всё будет хорошо, кроме случая R, r, p.

При таком условии треугольник построить нельзя. Докажите почему.

Итак, игра в «лучшую задачу» в данному случае преследует цель: выделить яркую задачу на построение, в которой есть «вся геометрия», различные методы построения, знаменитые формулы, вариации условий и, наконец, посильная трудность.

Всё?

Увидим!

ГЛАВА 1.3. ЭМОЦИОНАЛЬНАЯ АНАЛОГИЯ ПАР РАВНОУГОЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Особая ценность предлагаемого материала в том, что он может быть предложен учащимся без боязни его трудности и непонимания. Наоборот, ученики впервые «почувствуют» эффект и эффективность метода аналогии, получат материал для самостоятельного исследования.

«Аналогия» является общепринятым методом. Настолько принятым, что подчас теряется его острота: «... по аналогии».

Рассмотрим отрезки (прямые), аналогичные высотам треугольника. Только они пересекают соответственные стороны не под прямым углом, а под произвольным, хотя все три угла равны между собой (*рис. 1*), или (что тоже) как показано на *рис. 2*:

$$\angle ABT_2 = \angle ACT_3.$$

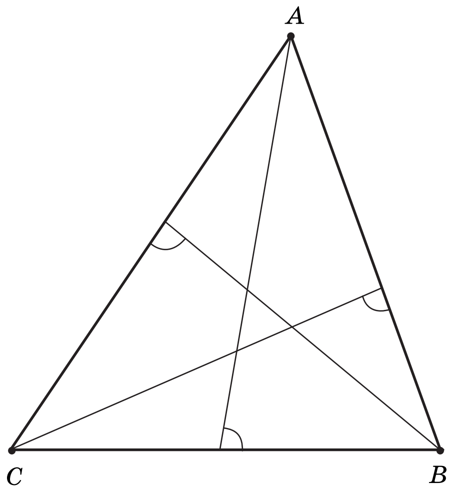

Рис. 1

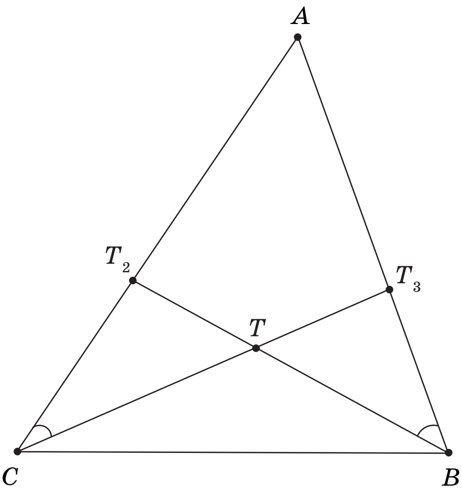

Рис. 2

Прямые BT_2 и CT_3 будем называть равноугольными. Оказывается, что свойства высот треугольника аналогичны свойствам равноугольных прямых. Исследования предлагаются в виде «рожденных» задач (у них один и тот же номер, отличающейся значком, например, 1^0).

Задача 1. В треугольнике ABC точки B, H_2, H_3, C принадлежат одной окружности (точки H_2, H_3 — основания высот, проведенных из вершин B и C).

Задача 1⁰. Точки B, T_2, T_3, C принадлежат одной окружности.

Доказательство. Поскольку

$$\angle T_2BT_3 = \angle T_2CT_3$$

(*рис. 3*), то утверждение задачи доказано.

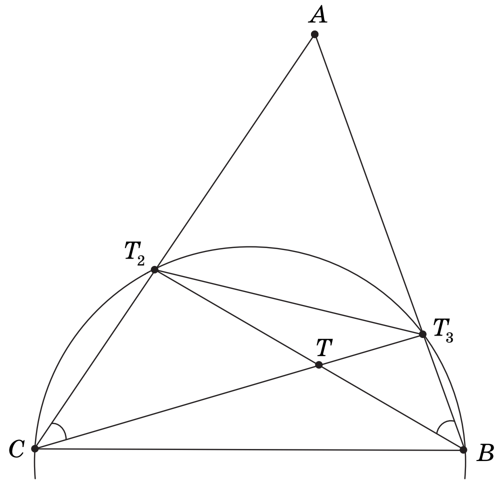

Рис. 3

Задача 2. Доказать, что $\angle AH_2H_3 = \angle ABC$.

Задача 2⁰. Доказать, что $\angle AT_2T_3 = \angle ABC$.

Доказательство. Имеем

$$\angle AT_2T_3 = 180° - \angle CT_2T_3$$

(рис. 3). Поскольку четырёхугольник BT_3T_2C вписан в окружность, то

$$\angle T_3BC = 180° - \angle CT_2T_3,$$

значит,

$$\angle AT_2T_3 = \angle ABC.$$

Следствие. Отрезки H_2H_3 и T_2T_3 параллельны.

Задача 3. Центр окружности, описанной около треугольника AH_2H_3 совпадает с серединой отрезка AH (точка H — ортоцентр).

Задача 3⁰. Центр окружности, описанной около треугольника AT_2T_3 совпадает с серединой отрезка AH_1.

Доказательство. Поскольку $T_2T_3 \perp OA$, то высота треугольника AT_2T_3, опущенная на T_2T_3, принадлежит отрезку OA.

В треугольнике ABC угол между радиусом OA и высотой AH_1 равен $|\angle B - \angle C|$. Поскольку углы треугольников ABC и AT_2T_3 равны, то угол между высотой треугольника AT_2T_3 и радиусом, проведенным в вершину A окружности, описанной около треугольника AT_2T_3, также равен $|\angle B - \angle C|$. Это означает, что этот радиус (а значит, и центр окружности) принадлежит отрезку AH_1.

Задача 4. Пусть точка O_1 — центр окружности, описанной около треугольника BHC (точка H — ортоцентр). Доказать, что $O_1H \perp H_2H_3$.

Доказательство. Известно, что $OA \perp H_2H_3$ и $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$. Найдём угол $\angle O_1HH_1$ (*рис. 4*):

$$\angle O_1HH_1 = |\angle HCB - \angle HBC| =$$
$$= |\ 90^\circ - \angle B - 90^\circ + \angle C| =$$
$$= |\angle C - \angle B|.$$

Значит, $O_1H \parallel OA$, следовательно, $O_1H \perp H_2H_3$.

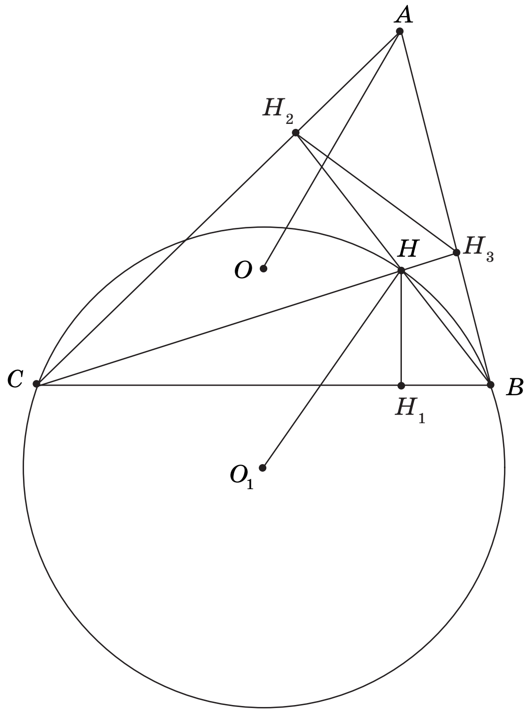

Рис. 4

Задача 4⁰. Пусть Q — центр окружности, описанной около треугольника BTC (T — точка пересечения отрезков BT_2 и CT_3). Доказать, что $QT \perp T_2T_3$.

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему.

Проведём в треугольнике BTC высоту TD (*рис. 5*).

Пусть, для определенности $\angle B \geq \angle C$. Положим

$$\angle T_2BT_3 = \alpha.$$

Тогда

$$\angle QTD = \angle B - \alpha - (\angle C - \alpha) =$$
$$= \angle B - \angle C.$$

Но $\angle OAH_1$ также равен $\angle B - \angle C$ и тогда $TD \parallel AH_1$, значит,

$$QT \parallel OA \text{ и } QT \perp T_2T_3.$$

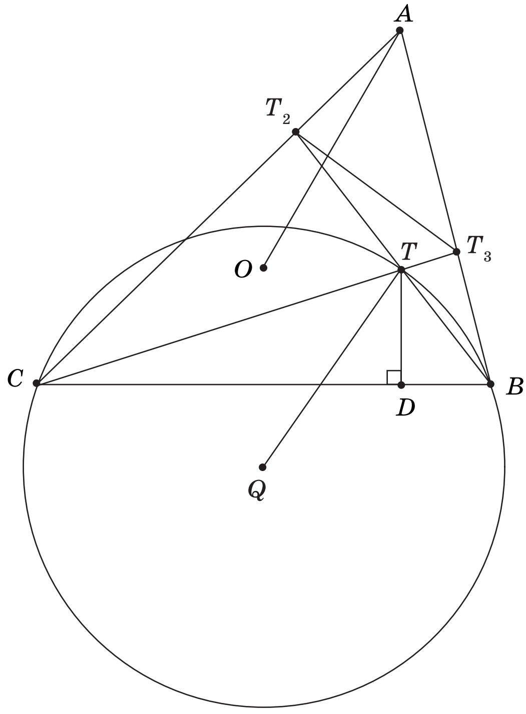

Рис. 5

Интриги двух и трёх пар равноугольных прямых

Имеем пару равноугольных прямых BT_2 и CT_3 (*рис. 6*).

Обозначим

$$\angle T_2BA = \angle T_3CA$$

как α. Появление двух пар равноугольных прямых: проводим прямую AT_1 под углом

$$\angle CAT_1 = \angle T_2BC = \theta.$$

Тогда получим две пары равноугольных прямых BT_2 и CT_3; AT_1 и BT_2.

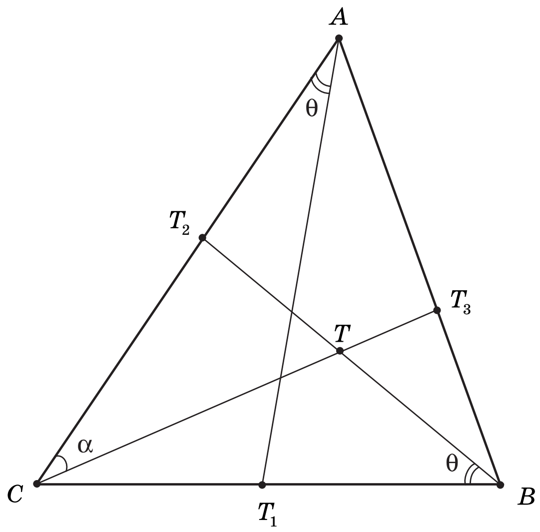

Рис. 6

Заметим, что свойства первой пары равноугольных прямых идентичны ко второй паре. Заметим также, что они не имеют общую точку.

Три пары равноугольных прямых (!!) — интрига

Третья пара равноугольных прямых может быть получена только из двух пар равноугольных прямых: итак, проведены две пары BT_2 и CT_3; AT_1 и BT_2 (*рис. 7*).

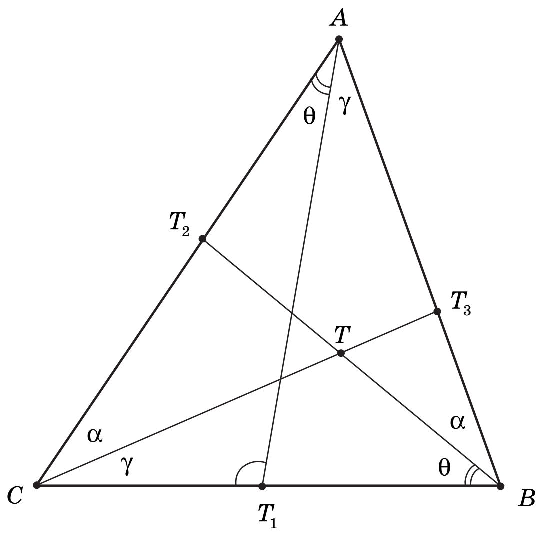

Рис. 7

Если оказалось, что

$$\angle T_1AB = \angle T_3CB = \gamma,$$

то получим и третью пару равноугольных прямых: AT_1 и CT_3.

Теорема 1. Если две пары равноугольных прямых оказались (благодаря равенству углов γ) тремя парами равноугольных, то прямые AT_1, BT_2, CT_3 — высоты треугольника ABC.

Доказательство. В треугольнике ABC:

$$2\alpha + 2\theta + 2\gamma = 180°,\ \alpha + \theta + \gamma = 90°.$$

Но и

$$\angle AT_1C = \angle T_1AB + \angle T_3BC = \alpha + \beta + \theta = 90°,$$

значит, AT_1 — высота. Аналогично отрезки BT_2 и CT_3 — высоты.

Теорема 2. Если две пары равноугольных прямых имеют общую точку, то прямые AT_1, BT_2, CT_3 — высоты треугольника ABC.

Доказательство

Первый способ. Поскольку

$$\angle AT_1C + \angle AT_1B = 180°,$$

а $\angle TT_1C = \angle TT_3A$, то

$$\angle TT_1B + \angle TT_3B = 180°.$$

Следовательно,

$$\angle T_1TT_3 = 180° - \angle B \text{ и } \angle ATC = 180° - \angle B.$$

Аналогично доказываем, что

$$\angle BTC = 180° - \angle A \text{ и } \angle ATB = 180° - \angle C.$$

Поскольку точка пересечения сегментов, вмещающих углы $180° - \angle A$, $180° - \angle B$, $180° - \angle C$ единственна, как и ортоцентр, который принадлежит трем сегментам, утверждаем, что точка T — ортоцентр треугольника ABC.

Второй способ. Поскольку точки B, T_2, T_3, C принадлежат одной окружности, то

$$BT \cdot TT_2 = CT \cdot TT_3.$$

Аналогично:

$$AT \cdot TT_1 = BT \cdot TT_2.$$

Откуда

$$AT \cdot TT_1 = CT \cdot TT_3,$$

значит, $\angle BAT_1 = \angle BCT_3$ — получили третью пару равноугольных прямых, значит, точка T — ортоцентр треугольника ABC.

Задача. Точки A, T_2, T_3, T принадлежат окружности. Доказать, что точка T — ортоцентр (для самостоятельного решения).

ГЛАВА 1.4. ЗАБАВНО? И ПОУЧИТЕЛЬНО!

Странное название для математики. А вы, уважаемый читатель, подождите...

В популярной книжке уважаемого московского издательства как хорошую знакомую встретил задачу.

Задача. Доказать, что серединный перпендикуляр к стороне ортотреугольника треугольника ABC делит противоположную сторону треугольника ABC пополам.

И приведен рисунок (*рис. 1*).

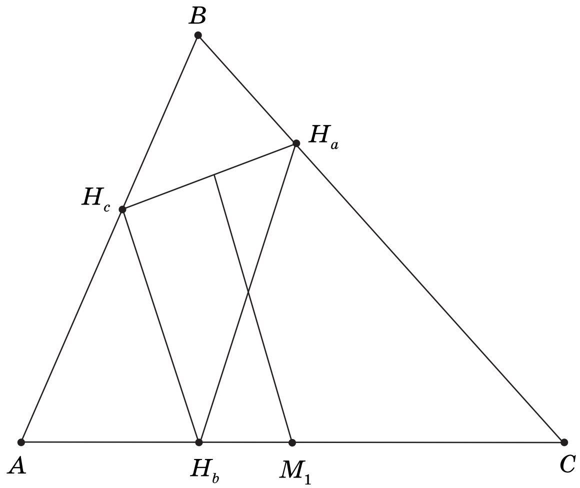

Рис. 1

У меня было два элегантных доказательства.

Доказательство

Первый способ. Пусть H_2 и H_3 — основания высот из вершин B и C (*рис. 2*).

Из прямоугольных треугольников BH_2C и CH_3B медианы M_1H_2 и M_1H_3 равны, а значит, перпендикуляр M_1F к отрезку H_2H_3 проходит через его середину.

Второй способ. Через точки B, H_2, H_3 и C проведём окружность, диаметр которой BC (*рис. 3*), а центр сов-

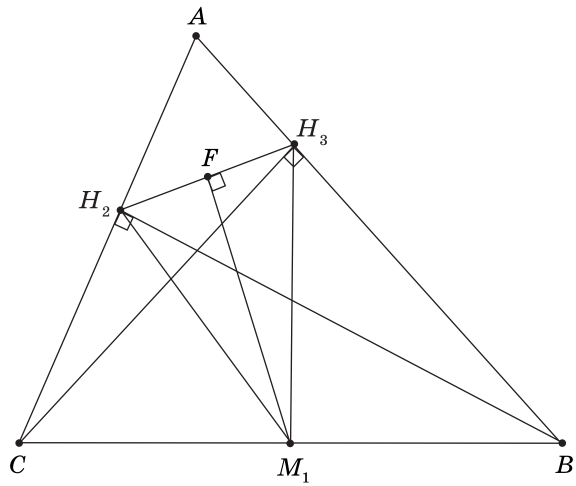

Рис. 2

падает с серединой M_1 отрезка BC. Тогда серединным перпендикуляром к отрезку H_2H_3 будет отрезок M_1F.

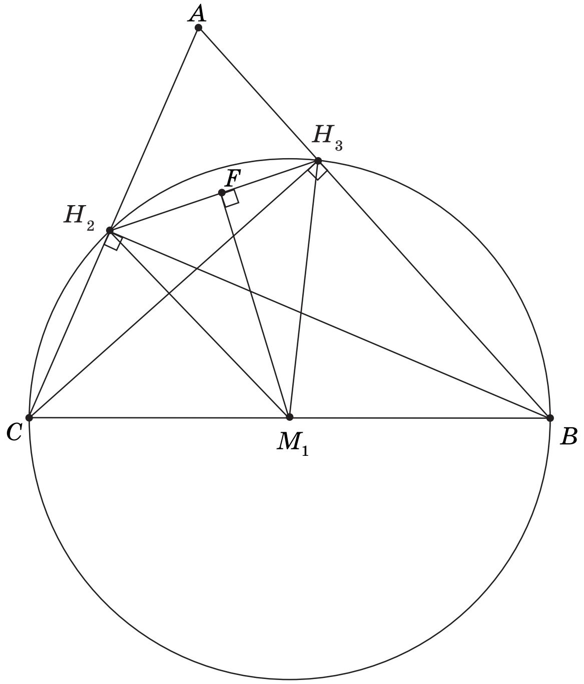

Рис. 3

Меня естественно заинтересовало решение, приведенное в книге.

Решение. *Воспользовавшись задачей 40 и теоремой синусов, примененной к треугольникам* H_cH_bM *и* H_bH_aM ($H_cM = H_aM$ *по условию*), *доказать равенство углов* H_bH_cM *и* H_bH_aM (*см. рис.* 4).

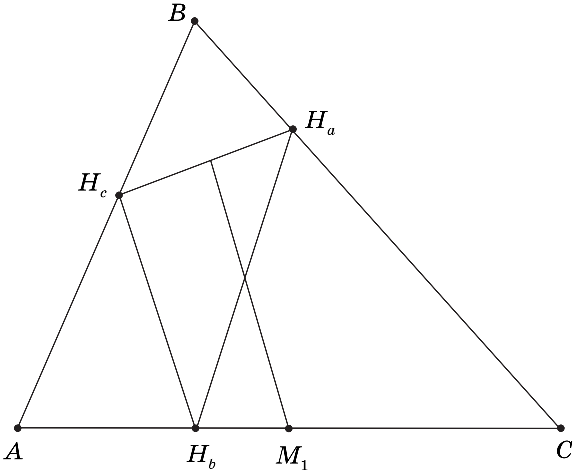

Рис. 4

Теперь нетрудно доказать, что $AM = H_cM$ *и* $MC = H_aM$.

Утверждение задачи следует также из того факта, что точки H_c, H_b, H_a *и* M *лежат на одной окружности — окружности девяти точек!*

Судя по всему, автор считал самым естественным и коротким доказательство, основанное на свойствах окружности Эйлера (девяти точек). Я был согласен с ним до тех пор, пока не попробовал «быстро» доказать предложенную задачу.

Попробуйте и вы!

Спасибо автору книги за ссылку на окружность девяти точек. Доказательство стоит обсуждения.

Доказательство. Окружность Эйлера описана около ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ (*рис. 5*), в котором прямая H_1H делит дугу H_2H_3 пополам ($H_2E_1 = E_1H_3$).

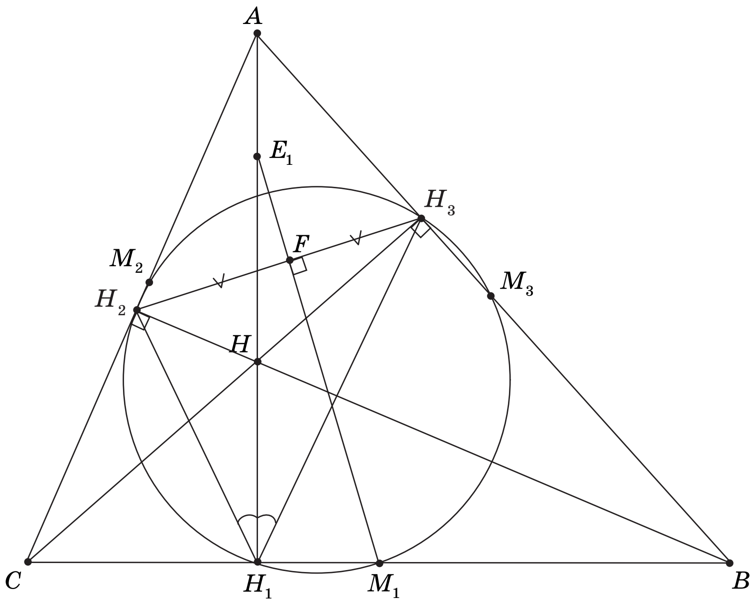

Рис. 5

Поскольку M_1E_1 — диаметр окружности девяти точек, то утверждение задачи доказано.

Пусть это доказательство не очевидно, но... очень эмоционально!

Думается, что оно не единственное, и автор, наверняка, призвал перебрать их.

Забавно? Поучительно!

ГЛАВА 1.5. ЭСТЕТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Памяти М. И. Ядренко

Свою первую книгу «Трикутник і тетраедр в задачах» я стремился издать более двадцати лет. Наконец, чтобы «отвязаться»от меня редакция издательства «Радянська освіта» отдала рукопись на рецензию в Университет им. Т. Г. Шевченко. Там она попала на кафедру, которой руководил Михаил Иосифович. В рецензии первую строчку «Книжку повинно видати». Эту фразу я запомнил на всю жизнь.

Предлагаемое доказательство известной формулы публикуется впервые. С моей точки зрения, оно глубоко эмоционально и эстетично. Как часто бывает, мне кажется, что лучшего у меня нет. Вот почему я хочу посвятить его памяти М. И. Ядренко. Достойно ли оно такого назначения, читатель оценит, ознакомившись с ним.

Итак.

Докажем, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Для его доказательства требуется знание ниже следующих формул и фактов.

1. Формулы

$$OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right). \qquad (*)$$

2. Инцентр I треугольника ABC будет ортоцентром треугольника $W_1W_2W_3$.

3. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

4. В треугольнике ABC: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

По формуле (*) для треугольника $W_1W_2W_3$:

$$OI^2 = 9R^2 - \left(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2\right),$$

где $a_1 = W_2W_3$, $b_1 = W_1W_2$, $c_1 = W_1W_2$.

Учитывая, что углы треугольника $W_1W_2W_3$ равны

$$90^\circ - \frac{A}{2},\ 90^\circ - \frac{B}{2},\ 90^\circ - \frac{C}{2},$$

имеем:

$$OI^2 = 9R^2 - 4R^2\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right) = 9R^2 - 4R^2\left(\frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2}\right) =$$

$$= 9R^2 - 4R^2\left(\frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2}\right) = 9R^2 - 2R^2\left(\frac{4R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}\right) =$$

$$= 9R^2 - 2R\left(4R + r\right) = R^2 - 2Rr.$$

И всё!

ГЛАВА 1.6. ОТРЕЗКИ МАВЛО — В ШКОЛУ

В украинском журнале «Математика в школе» № 3, 2004 была опубликована статья выдающегося геометра современности Дмитрия Пантелеймоновича Мавло «Красивые свойства замечательных тел». В ней он впервые в мире (!) сформулировал и доказал свойства «дуг Мавло», о чем уже писалось немало (см. И. Кушнир «Геометрия на баррикадах 2»).

В несправедливой тени оказались отрезки биссектрального треугольника, которые имеет смысл назвать «отрезки Мавло». С радостью привожу доказательство члена моего семинара, моего ученика Олега Черкасского, свойств этих замечательных отрезков. Простое изящное доказательство позволяет не только ввести теорему Мавло в школьную эмоциональную геометрию, но и получить самостоятельную прекрасную задачу по алгебре. В очередной раз покоряет смелость Олега в выборе предмета исследования и неожиданного талантливого доказательства. Читайте и наслаждайтесь: Дмитрий Мавло открыл. Олег Черкасский подарил это открытие эмоциональной геометрии.

Теорема Д. П. Мавло. Окружность, описанная около биссектрального треугольника, отсекает от сторон данного треугольника три хорды, длина одной из которых равна сумме двух других.

Доказательство (автор Олег Черкасский). Обозначим L_1, L_2, L_3 — основания биссектрис внутренних углов треугольника ABC, x, y, z — длины отрезков, отсекаемых окружностью, описанной около биссектрального треугольника $L_1L_2L_3$, на сторонах треугольника ABC (*рис. 1*).

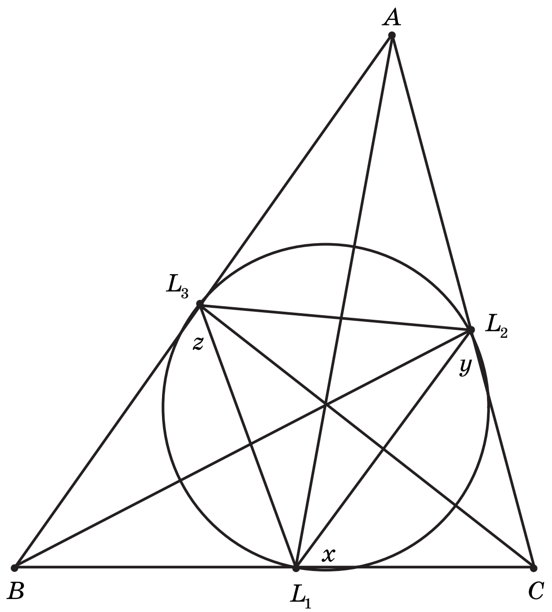

Рис. 1

Имеем

$$AL_3=\frac{bc}{b+a},\ BL_3=\frac{ac}{b+a},\ AL_2=\frac{bc}{c+a},\ CL_2=\frac{ba}{b+a},\ BL_1=\frac{ca}{b+c},\ CL_1=\frac{ba}{b+c}.$$

По свойству секущих:

$$\begin{cases}\dfrac{bc}{b+a}\left(\dfrac{bc}{b+a}+z\right)=\dfrac{bc}{c+a}\left(\dfrac{bc}{c+a}+y\right);\\ \dfrac{ac}{a+b}\left(\dfrac{ac}{a+b}-z\right)=\dfrac{ac}{b+c}\left(\dfrac{ac}{b+c}-x\right);\\ \dfrac{ab}{b+c}\left(\dfrac{ab}{b+c}+x\right)=\dfrac{ab}{a+c}\left(\dfrac{ab}{a+c}-y\right);\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{z}{a+b}-\dfrac{y}{a+c}=bc\left(\dfrac{1}{(a+c)^2}-\dfrac{1}{(a+b)^2}\right); & (I)\\ -\dfrac{z}{a+b}+\dfrac{x}{b+c}=ac\left(\dfrac{1}{(b+c)^2}-\dfrac{1}{(a+b)^2}\right); & (II)\\ \dfrac{x}{c+b}+\dfrac{y}{a+c}=ab\left(\dfrac{1}{(a+c)^2}-\dfrac{1}{(c+b)^2}\right). & (III)\end{cases}$$

Проведём следующие действия над уравнениями системы:

$$\frac{(I)}{bc}-\frac{(II)}{ac}-\frac{(III)}{ab}.$$

Получим:

$$z\left(\frac{1}{bc(a+b)}+\frac{1}{ac(a+b)}\right)-y\left(\frac{1}{bc(a+c)}+\frac{1}{ab(a+c)}\right)-x\left(\frac{1}{ac(b+c)}+\frac{1}{ab(b+c)}\right)=0.$$

$$\frac{z}{abc}-\frac{y}{abc}-\frac{x}{abc}\ \text{ или }\ z=y+x.$$

Всё!

ГЛАВА 1.7. ФОРМУЛЫ НАЧИНАЮТ... И ВЫИГРЫВАЮТ

Основными «персонажами» рассматриваемых геометрических ситуаций являются прямые, проходящие через известные точки треугольника. Пересекая высоту AH_1 треугольника (или прямую AH_1) в определенной точке, они образуют геометрические сюжеты, о которых и пойдет речь. Более того, для доказательства новых задач применяются формулы, те самые, которые «начинают и... выигрывают». Рассмотрим их.

Первая формула. Если описать окружность вокруг треугольника ABC, то

$$AI\cdot IW_1=2Rr, \tag{1}$$

где точка I — инцентр, W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью, R и r — радиусы описанной и вписанной окружности соответственно.

Доказательство. Проведём диаметр W_1D. Треугольники AIK и CDW_1 подобны (K — точка касания вписанной окружности со стороной AB) (*рис. 1*).

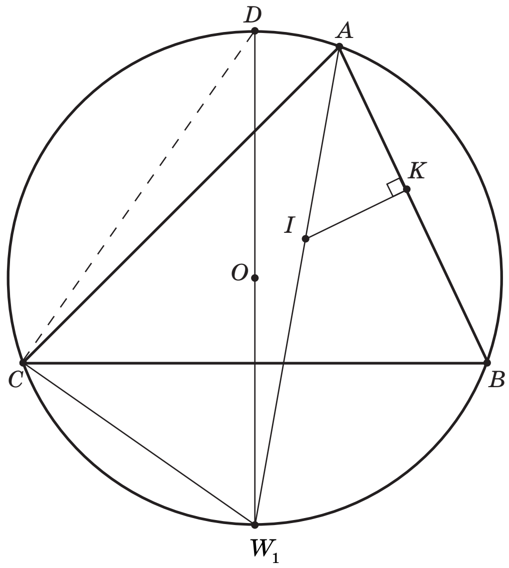

Рис. 1

Тогда $\dfrac{AI}{DW_1} = \dfrac{IK}{CW_1}$. Поскольку $CW_1 = IW_1$ (теорема трилистника), то

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr.$$

Вторая формула

$$AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a, \tag{2}$$

где точка I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, r_a — радиус этой окружности.

Доказательство. Проведём радиус I_aT_2 в точку касания вневписанной окружности с прямой AC (*рис. 2*).

Поскольку $\Delta AI_aT_2 \sim \Delta DW_1C$, то $\dfrac{2R}{I_aA} = \dfrac{CW_1}{r_a}$. Учитывая, что $CW_1 = I_aW_1$, имеем $AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a$.

Третья формула

$$M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}, \tag{3}$$

где точка M_1 — середина стороны BC.

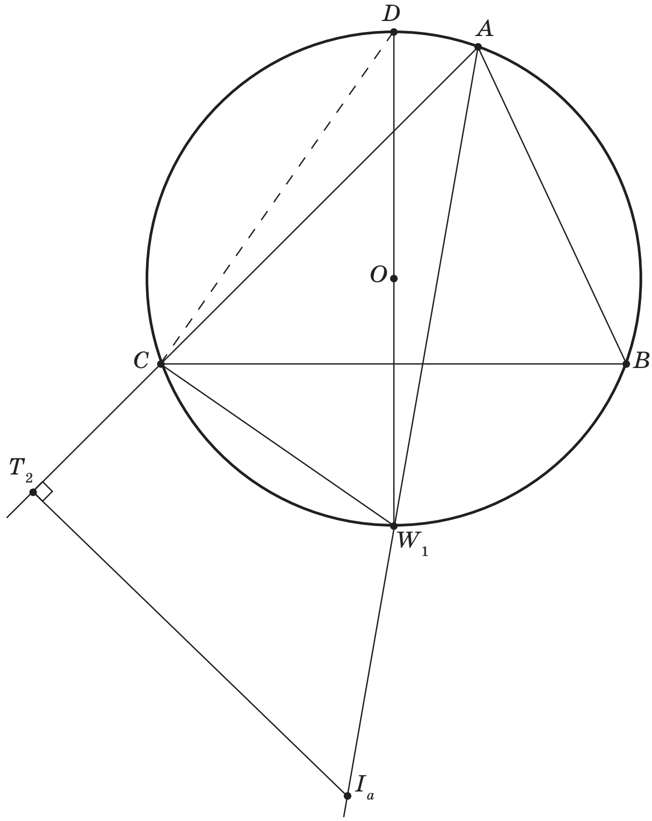

Рис. 2

Доказательство. Обозначим T_1 точку касания вневписанной окружности со стороной BC (*рис. 3*).

По теореме Мансиона $I_aW_1 = W_1I$, значит, M_1W_1 — средняя линия в треугольнике INI_a. Поскольку $\Delta IK_1M_1 = \Delta M_1T_1N$ ($IK_1 \perp BC$), то

$$T_1N = IK_1 = r,$$

а $NI_a = r_a - r$, значит,

$$M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}.$$

Рассмотрим задачи (все они предлагались на олимпиадах высокого уровня) с похожими геометрическими ситуациями: прямая, проходящая через две определенные точки треугольника, пересекает высоту AH_1.

В зависимости от выбранных точек на высоте (или прямой, которой принадлежит высота), могут быть получены (и это требуется доказать) отрезки r или r_a, а также точка — середина высоты. Каждая из этих задач (точнее теорем или задач на построение) уже в геометрической литературе рассматривалась: иногда с помощью алгебраических формул, часто с помощью нескольких гомотетий.

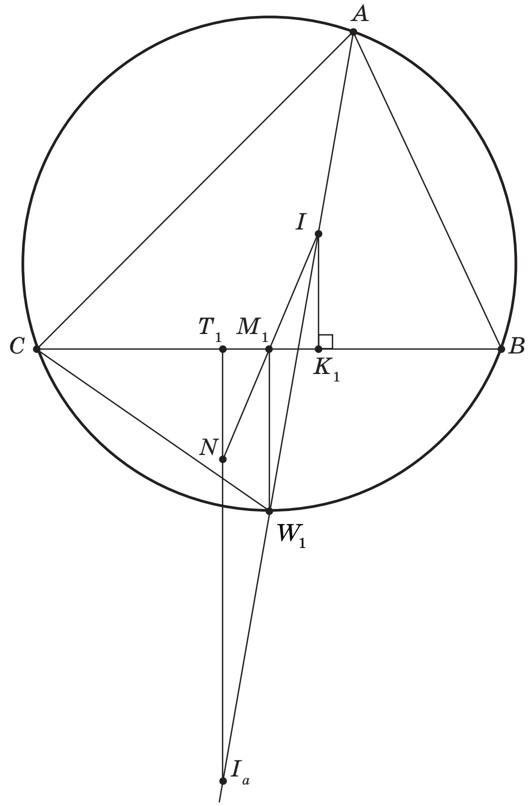

Рис. 3

В отличие от предложенных способов рассмотрим доказательства, принципиально базирующиеся на одной формуле

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr \text{ (или } AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a).$$

Подобный универсальный прием до сих пор не рассматривался.

Начнём с самой популярной задачи.

Задача 1. Прямая M_1I пересекает высоту AH_1 треугольника ABC в точке E. Докажите, что отрезок AE равен r.

Доказательство. Докажем задачу с применением формулы (1). Вокруг треугольника ABC опишем окружность (*рис. 4*).

Проведём высоту AH_1, биссектрису AW_1, диаметр W_1D. Пусть M_1I пересекает высоту AH_1 в точке E. Из подобия треугольников AIE и W_1IM_1 имеем

$$\frac{AI}{IW_1} = \frac{AE}{M_1W_1}.$$

Обозначим AE как x.

$$x = \frac{AI \cdot M_1W_1}{IW_1}.$$

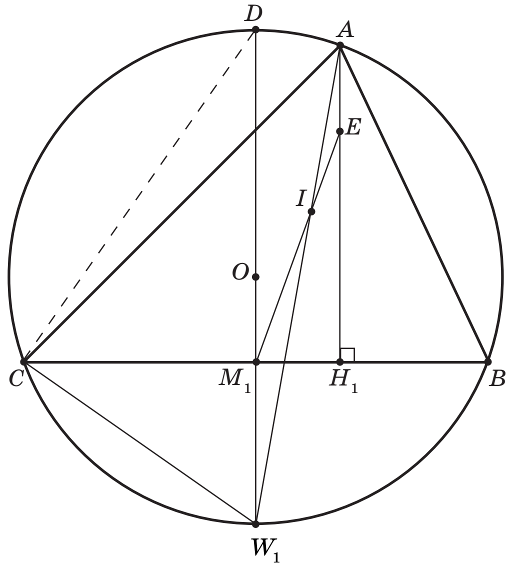

Рис. 4

Обращаем внимание на оригинальные домножения.

Для того чтобы применить формулу (1), домножим числитель и знаменатель полученной дроби на IW_1!

Получим

$$x = \frac{AI \cdot IW_1 \cdot M_1W_1}{IW_1^2} = \frac{2Rr \cdot M_1W_1}{IW_1^2}.$$

По теореме трилистника $IW_1 = CW_1$, а

$$CW_1^2 = 2R \cdot M_1W_1$$

(из прямоугольного треугольника CW_1D). Значит,

$$x = \frac{2Rr \cdot M_1W_1}{2R \cdot M_1W_1} = r,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке T_1. Прямая T_1I пересекает высоту AH_1 в точке Q. Доказать, что точка Q — середина высоты AH.

Доказательство. Создадим ситуацию, аналогичную задаче 1, для применения формулы (2). Вокруг треугольника ABC опишем окружность (*рис. 5*).

Построим центр вневписанной окружности — точку I_a, точка T_1 — точка касания вневписанной окружности и стороны BC (*рис. 5*). Треугольники AIQ и I_aIT_1 подобны:

$$\frac{x}{r_a} = \frac{AI}{II_a}.$$

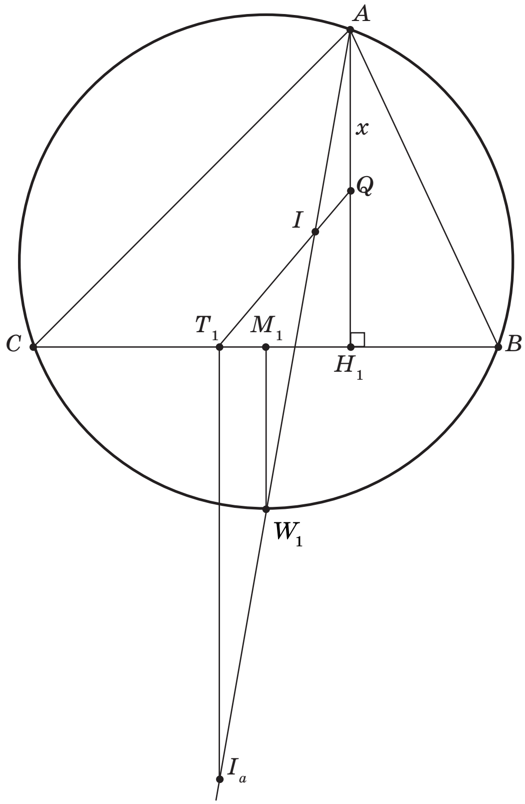

Рис. 5

По теореме Мансиона $II_a = 2IW_1$, значит,

$$x = \frac{r_a \cdot AI}{2IW_1} = \frac{r_a \cdot 2Rr}{2IW_1^2} = \frac{r_a \cdot R \cdot r}{2R \cdot M_1W_1} = \frac{r_a \cdot r}{r_a - r} = \frac{\frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p}}{\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S}{a} = \frac{1}{2} h_a .$$

Задача 3. Прямая W_1K_1 (K_1 — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности) пересекает высоту AH_1 в точке D такой, что

$$DH_1 = r.$$

Доказать.

Доказательство. Треугольники ADW_1 и IK_1W_1 подобны (*рис. 6*).

Обозначим AD как x. Докажем, что $AD = h_a - r$. Имеем

$$\frac{x}{r} = \frac{AW_1}{IW_1},$$

откуда

$$x = \frac{r \cdot AW_1}{IW_1} = r\left(\frac{AI + IW_1}{IW_1}\right) = r\left(1 + \frac{AI}{IW_1}\right) = r\left(1 + \frac{2Rr}{IW_1^2}\right) = r\left(1 + \frac{2Rr}{2R \cdot M_1W_1}\right).$$

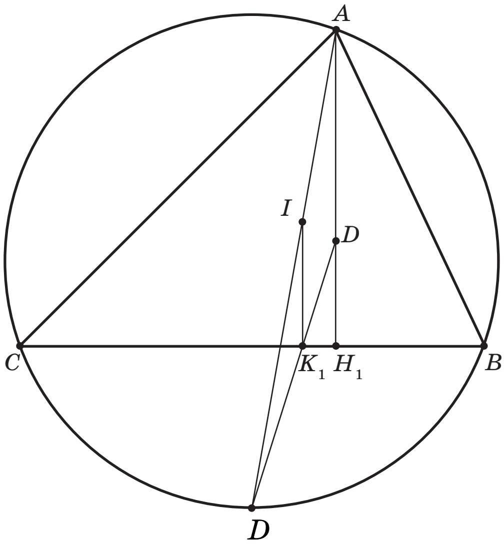

Рис. 6

Применим формулу (3):

$$M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2}.$$

Имеем

$$x = r\left(1 + \frac{r}{\frac{r_a - r}{2}}\right) = r\left(\frac{r_a + r}{r_a - r}\right) = r\left(\frac{\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p}}{\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}}\right) = r\left(\frac{2p-a}{a}\right) = \frac{2pr}{a} - r = h_a - r.$$

А это значит, что $DH_1 = r$.

Задача 4. Прямая T_1W_1 пересекает прямую AH_1 в точке U, так что $H_1U = r_a$. Доказать.

Доказательство. Обозначим отрезок H_1U как x (*рис. 7*).

Треугольники $T_1I_aW_1$ и UW_1A подобны:

$$\frac{r_a}{h_a + x} = \frac{I_aW_1}{AW_1}.\ r_a = \frac{(h_a + x)IW_1}{AI + IW_1}.$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{AI + IW_1}{(h_a + x)IW_1},$$

$$h_a + x = \frac{r_a(AI + IW_1)}{IW_1} = r_a\left(1 + \frac{AI}{IW_1}\right),\ h_a + x = r_a\left(\frac{2p}{a} - 1\right),$$

$$x = r_a\left(\frac{2p}{a} - 1\right) - h_a = r_a\left(\frac{2p}{a} - 1\right) - \frac{2S}{a} = \frac{2p\cdot r_a - a\cdot r_a - 2r_a(p-a)}{a} =$$

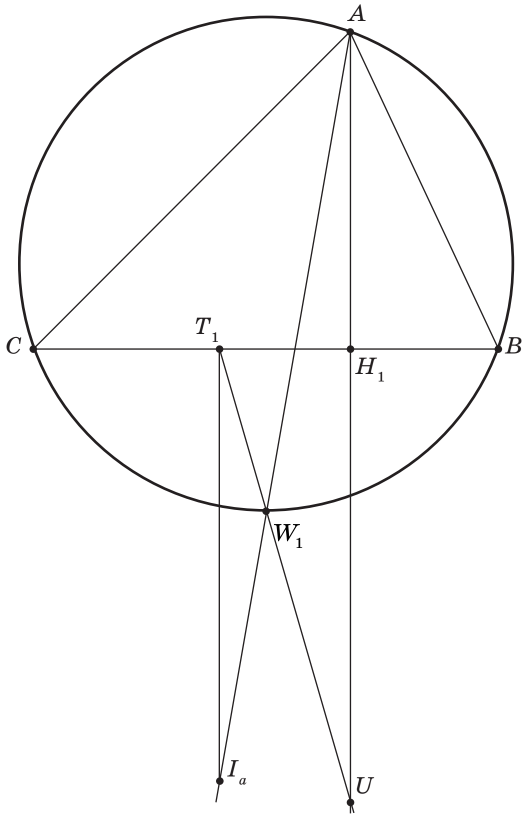

Рис. 7

$$= \frac{2p \cdot r_a - r_a \cdot a - 2r_a \cdot p + 2r_a \cdot a}{a} = \frac{r_a \cdot a}{a} = r_a.$$

И всё!

Задача 5. Прямая I_aM_1 пересекает прямую AH_1 в точке V так, что $AV = r_a$. Доказать.

Доказательство. Продлим высоту AH_1 (*рис. 8*).

Прямая I_aM_1 пересечёт прямую AH_1 в точке V (*рис. 8*). Треугольники VAI_a и $M_1W_1I_a$ подобны:

$$\frac{x}{M_1W_1} = \frac{AI_a}{I_aW_1}, \; x = \frac{M_1W_1 \cdot AI_a}{I_aW_1}.$$

Воспользовавшись формулой (2)

$$(AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a)$$

имеем:

$$x = \frac{M_1W_1 \cdot I_aW_1 \cdot AI_a}{I_aW_1^2} = \frac{2Rr_a \cdot M_1W_1}{2R \cdot M_1W_1} = r_a.$$

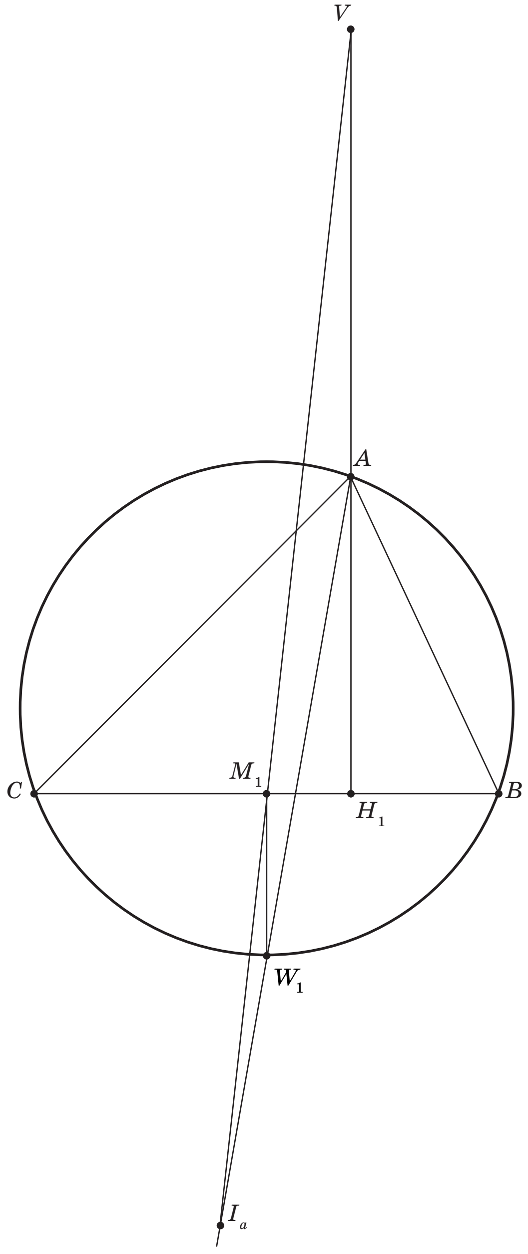

Рис. 8

Задача 6. Прямая I_aK_1 пересекает прямую AH_1 в её середине. Доказать.

Доказательство. Обозначим Q — точку пересечения прямой I_aK_1 с высотой AH_1 (K_1 — точка касания вписанной окружности и стороны BC) (*рис. 9*).

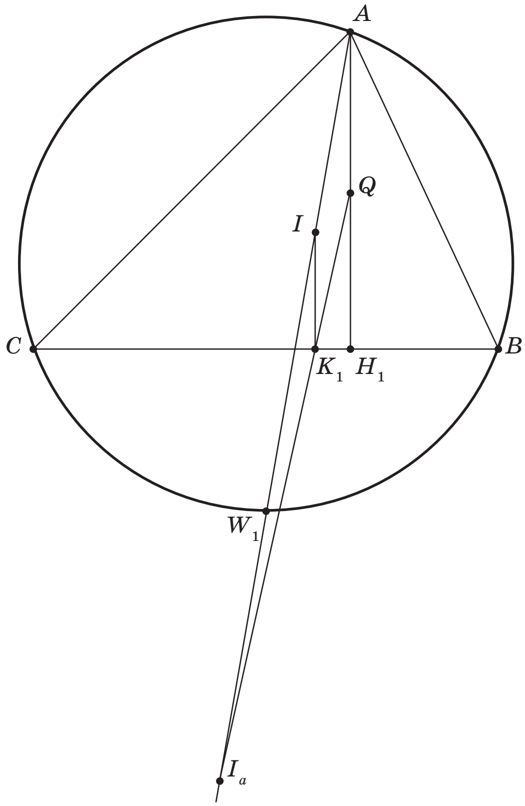

Рис. 9

Пусть AQ равно x. Треугольники I_aAQ и I_aIK_1 подобны:

$$\frac{x}{r}=\frac{AI_a}{I_aI}.\ x=\frac{r\cdot AI_a}{2IW_1}$$

(по теореме Мансиона).

$$x=\frac{r\left(AI+2IW_1\right)}{2IW_1}=r\left(\frac{AW_1}{2IW_1}+1\right)=r\left(\frac{2Rr}{2IW_1^2}+1\right)$$

(применили формулу (1)).

$$x=r\left(\frac{Rr}{2R\cdot M_1W_1}+1\right)=r\left(1+\frac{r}{r_a-r}\right)=r\left(\frac{r_a-r+r}{r_a-r}\right)=r\left(\frac{r_a}{r_a-r}\right).$$

Имеем

$$\frac{1}{x}=\frac{r_a-r}{r\cdot r_a}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{p-p+a}{S}=\frac{a}{S},$$

значит,

$$x=\frac{S}{a}=\frac{1}{2}h_a,$$

что и требовалось доказать.

* * *

И ещё позиционные задачи на построение треугольника.

Рассмотренные теоремы позволяют решить некоторые задачи на построение.

Построить треугольник ABC по элементам:

1) M_1, I, H_1 (*указание:* воспользоваться задачей 1);
2) T_1, I, H_1;
3) I_a, I, H_1;
4) W_1, T, h_{ax} (h_{ax} — прямая, которой принадлежит высота h_a);
5) I_a, M_1, h_{ax};
6) I_a, K_1, h_{ax}.

Итак, создан новый тип олимпиадных задач, с чем Вас и поздравляю!