УДК 51(031)
ББК 22.1я7
Ф76

Рекомендовано до друку вченою радою
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника»
(протокол № 3 від 29 березня 2016 р.)

Рецензенти:
Заторський Р. А., доктор фізико-математичних наук, професор
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)
Кукуш О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор
(Київський національний університет ім. Тараса Шевченка),
Никифорчин О. Р., доктор фізико-математичних наук, професор
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Федак І. В.
Ф76 Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді / І. В. Федак — Х. : Видавнича група «Основа», 2016. — 239, [1] с.
ISBN 978-617-00-2829-7.

Зібрані задачі тридцяти Івано-Франківських обласних олімпіад із математики за 1987–2016 роки, до проведення яких автор посібника мав безпосереднє відношення як член чи голова журі. Наведені відповіді та вказівки до їх розв'язування, а також критерії оцінювання.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика», учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

УДК 51(031)
ББК 22.1я7

ISBN 978-617-00-2829-7

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Математичні олімпіади школярів — дуже популярні змагання в Україні і мають уже понад вісімдесятилітню історію. Перша міська математична олімпіада була проведена 1935 року в Києві з ініціативи видатного математика академіка М. П. Кравчука. 1961 року пройшла перша Республіканська олімпіада з математики, що започаткувала Всеукраїнські олімпіади юних математиків, членом журі яких автор цього посібника є з 1990 року.

Мені, тоді учневі звичайної сільської школи с. Парище Надвірнянського району Івано-Франківської області, також тричі пощастило бути учасником таких змагань, а в 1974 році — ще й випробувати свої сили на VIII Всесоюзній олімпіаді юних математиків у Єревані, за що я дуже вдячний своїй вчительці математики Петрик Ірині Василівні.

Цікавість до математичних олімпіад і нестандартних задач лише посилилася під час викладацької роботи у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника. Олімпіадна тематика стала ключовою в позакласній роботі з учнями, лекціях на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики, при читанні спеціальних курсів «Розв'язування задач підвищеної складності з математики», «Олімпіадні задачі» на факультеті математики та інформатики.

Пропонований вашій увазі посібник є своєрідним підсумком тридцятирічної роботи його автора з обдарованими дітьми. У ньому наведені умови задач III етапу Всеукраїнських олімпіад з математики, які проходили в Івано-Франківській області у 1987–2016 роках, до проведення яких автор посібника мав безпосереднє відношення як член чи голова журі. Зокрема, ним повністю були сформовані комплекти завдань таких олімпіад 1990–1993, 1996, 1997, 2002, 2003, 2005–2007 та 2015 років.

До кожної із задач подані розв'язання чи вказівки щодо їх розв'язання для найпростіших із них.

Сподіваюся, що разом із посібниками «Готуємося до олімпіади з математики», «Розв'язування задач підвищеної складності з математики» та ще понад п'ятдесятьма іншими публікаціями автора на олімпіадну тематику, він буде цікавим як учням, студентам та вчителям математики, так і всім любителям нестандартних задач.

УМОВИ ЗАДАЧ ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИХ ОБЛАСНИХ ОЛІМПІАД ІЗ МАТЕМАТИКИ 1987–2016 роки

1987 рік

6 клас

1. Для нумерації сторінок підручника використали 6869 цифр. Скільки сторінок має підручник?

2. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см. Медіана, проведена до бічної сторони, ділить його на два трикутники з периметрами 30 см і 24 см. Визначте довжину медіани і сторін заданого трикутника.

3. Потрібно упакувати самовари в ящики, із яких одні вміщають 4 самовари, а інші — 5. Скільки потрібно взяти тих та інших ящиків, щоб упакувати 41 самовар?

4. Задано ряд цілих чисел, утворений за законом: 4, 7, 12, 21, 38, … . Продовжте цей ряд до отримання восьмого числа.

7 клас

1. Визначте, при яких натуральних n вираз

$$\frac{n^3-2n^2+3}{n-2}$$

є цілим числом.

2. Побудуйте трикутник ABC, у якому вершина кута B знаходиться у заданій точці, а бісектриси двох інших кутів лежать на двох заданих прямих, які перетинаються.

3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\frac{xy}{x+y}=c,\ \ \frac{yz}{y+z}=a,\ \ \frac{zx}{z+x}=b.$$

4. На площині розташовано k зубчатих коліс так, що перше зчеплене з другим, друге — з третім і так далі, а останнє — з першим. У яких випадках колеса такої системи можуть рухатися?

8 клас

1. Доведіть, що сума квадратів медіан трикутника дорівнює $\frac{3}{4}$ суми квадратів його сторін.

2. Із кожної вершини п'ятикутника провели вектори до середин трьох, не суміжних із поданою вершиною, сторін. Доведіть, що сума всіх 15 побудованих у такий спосіб векторів дорівнює нулю.

3. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{y^2}{3}+\frac{48}{y^2}=10\left(\frac{y}{3}-\frac{4}{y}\right).$$

4. На дошці записані 5 чисел. Додавши їх попарно, дістали 10 таких сум: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа були записані на дошці?

9 клас

1. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{x^2-5|x|+4}{x-3}<0.$$

2. У змаганнях взяли участь троє бігунів: Андрейчук, Петренко і Сидоренко, посівши три різні місця. Перед забігом перший глядач сказав, що першим буде Андрейчук. Другий глядач сказав, що Сидоренко не буде останнім. Третій глядач сказав, що Петренко не прибіжить першим. Після забігу виявилося, що лише один із глядачів угадав, а два інші помилилися. У якому порядку фінішували бігуни?

3. Задані рівняння $ax^2+x+1=0$ та $x^2+ax+1=0$. Знайдіть усі a, при яких ці рівняння мають принаймні один спільний корінь.

4. Чи існує 1987-кутник, сторони якого послідовно дорівнюють 1, 2, 3, ..., 1987 і в який можна вписати коло?

10 клас

1. Знайдіть найбільше та найменше значення інтеграла

$$\int_a^b \cos^2 x\,dx \quad (a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}).$$

2. Розв'яжіть рівняння

$$11\sin^2 7x-3\sin 7x\cdot\cos 7x+5\cos^2 7x=a-b.$$

3. Доведіть, що в кожній трикутній піраміді є вершина, що з ребер, які виходять з неї, можна побудувати трикутник.

4. У квадраті зі стороною 1 довільно розташовані 126 точок. Доведіть, що деякі 6 із них обов'язково лежать усередині круга з радіусом $\frac{1}{7}$.

1988 рік

6 клас

1. Івась їхав в автобусі і побачив на кілометровому стовпі двоцифрове число. Через годину він побачив на кілометровому стовпі трицифрове число, перша цифра якого така, як друга цифра годину тому, друга цифра нуль, а третя — та сама, що й перша годину тому. Ще через дві години він побачив трицифрове число, яке відрізнялося від попереднього тільки другою цифрою. Яка швидкість автобуса?

2. Після зниження ціни на іграшку, яка коштувала 50 коп, магазин виручив за продані іграшки 31 крб. 93 коп. На скільки процентів знижено ціну?

3. Знайдіть x із рівняння

$$10101\cdot\left(\frac{5}{111111}-\frac{4}{3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37}+\frac{5}{2002x}\right)=\frac{7}{22}.$$

4. Через точку M проведено чотири прямі так, що $AM\perp MD$, $ME\perp MC$, і проведена пряма AC, причому $AM=MC$. AC перетинає MD у точці D, а ME — у точці E. Доведіть, що $\Delta AME=\Delta CMD$.

7 клас

1. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C=90^\circ)$ на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB у точці K. Через точку K проведено дотичну до кола, яка перетинає катет BC у точці D. Доведіть, що трикутник BDK рівнобедрений.

2. Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел x, y, які задовольняють рівняння $xy-3x+5y=25$.

3. Доведіть, що для всіх натуральних чисел a число

$$\frac{a^5}{120}+\frac{a^4}{12}+\frac{7a^3}{24}+\frac{5a^2}{12}+\frac{a}{5}$$

також натуральне.

4. Доведіть, що різниця основ трапеції менша від суми бічних сторін, а сума основ — менша від суми діагоналей.

8 клас

1. Не розв'язуючи рівняння $ax^2 + x - 2 = 0$, визначте, при яких a різниця коренів дорівнює 3.

2. У гострокутному трикутнику ABC висота CK ділить сторону AB у відношенні 2:1, починаючи з точки A, а висота BD — сторону AC у відношенні 3:1, починаючи також із точки A. Визначте сторону BC, якщо $AB = a$.

3. a, b, c — цілі числа, причому сума $a+b+c$ ділиться на 6. Доведіть, що й сума $a^5 + b^3 + c$ ділиться на 6.

4. Побудуйте графік функції

$$y = \left| x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \right|.$$

9 клас

1. У рівнобедреному трикутнику ABC довжина основи AB дорівнює 2 см, висота — 2 см. Пряма, перпендикулярна до AB і віддалена від точки A на x см, відтинає від трикутника ABC деяку фігуру. Знайдіть площу цієї фігури як функцію від x. Нарисуйте графік цієї функції.

2. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{4\sin x}{(x-3)^2} + \left|\sin x\right| = 0.$$

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB та CD паралельні, $AB + BC = CD + DA$. Доведіть, що $BC = AD$.

4. Розв'яжіть нерівність

$$\mathrm{tg}^2 x_1 + \mathrm{ctg}^2 x_1 + \mathrm{tg}^2 x_2 + \mathrm{ctg}^2 x_2 + \ldots + \mathrm{tg}^2 x_{994} + \mathrm{ctg}^2 x_{994} \le 1988.$$

10 клас

1. Задача 1, 10 клас, 1987 рік.

2. Троє учнів склали по 2 екзамени. A заявив, що він одержав дві четвірки, $Б$ — що п'ятірку і трійку, $В$ — що трійку і четвірку. Але кожен із них повідомив не свої оцінки, а одного з двох інших. Визначте оцінки кожного, якщо один із учнів назве правильно одну зі своїх оцінок. Який із них повинен це зробити?

3. Чи може сума відстаней від певної точки в трикутнику до його вершин бути меншою від півпериметра цього трикутника?

4. Для яких дійсних значень параметра a рівняння

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$$

має розв'язок?

1989 рік

6 клас

1. Двоє учнів, високий і низенький, вийшли одночасно з одного і того самого будинку в одну школу. В одного крок був на 20 % коротший, ніж у другого, але він встигав за цей час зробити на 20 % кроків більше, ніж другий. Хто з них раніше прийшов до школи?

2. Чи може 5^n+1 ділитися на 5^k-1, якщо n, k — натуральні числа?

3. Знайдіть значення виразу

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1988\cdot 1989}.$$

4. У чемпіонаті країни з футболу беруть участь 16 команд, кожна з яких має свій стадіон. Усі команди повинні зіграти між собою, причому в кожному турі відбуваються всі 8 ігор. Чи можна скласти розклад турів так, щоб кожна команда чергувала ігри вдома та на виїзді?

7 клас

1. Дано коло, точка A на колі і точка K усередині кола. Знайдіть на колі такі точки B та C, щоб точка K була точкою перетину бісектрис трикутника ABC.

2. Доведіть, що коли дві останні цифри цілого числа непарні, то це число не може бути точним квадратом.

3. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-xy+y^2=x^3. \end{cases}$$

4. Доведіть, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність

$$x^2-2xy+1989y^2\geq 0.$$

8 клас

1. Доведіть, що коли чотирикутники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ — паралелограми, вершини яких перелічені в одному напрямку, то ламана $ABTEA$ не має самоперетинів і обмежує паралелограм.

2. Нехай a, b, c — додатні числа. Доведіть, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

3. Довжини a та b двох сторін трикутника задовольняють умову $a \geq b$, а довжини відповідних висот дорівнюють H_a та H_b. Доведіть, що $a + H_a \geq b + H_b$. За якої умови досягається рівність?

4. Знайдіть найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2 + \left(1 - y^2\right)} + \sqrt{y^2 + \left(1 - x^2\right)}.$$

9 клас

1. Задача 4, 8 клас.

2. Серед чотирикутників із довжинами діагоналей 2 та 4 і кутом 45° між ними знайдіть чотирикутник із найменшим периметром (достатньо вказати, у якому відношенні його діагоналі діляться точкою перетину).

3. На сторонах AB та AC довільного трикутника ABC для кожного натурального n позначають точки K_n та M_n так, що

$$AK_n = \frac{AB}{n},\ AM_n = \frac{AC}{n+1}.$$

Доведіть, що всі прямі K_nM_n перетинаються в одній точці.

4. Доведіть, що коли x, y — додатні числа, які задовольняють рівняння $x^3 + y^3 = x - y$, то має місце нерівність $x^2 + y^2 < 1$.

10 клас

1. Задача 2, 8 клас.

2. Доведіть, що коли діагоналі вписаного опуклого чотирикутника перпендикулярні, то середини його сторін і основи перпендикулярів, опущених із точки перетину діагоналей на сторони, лежать на одному колі.

3. Числа a, b, c лежать на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і задовольняють рівності

$$\cos a = a,\ \sin\cos b = \cos b,\ \cos\sin c = c.$$

Розташуйте ці числа в порядку зростання.

4. На території деякої країни, яка має форму квадрата зі стороною 1000 км, знаходиться 51 місто. Країна має можливості для прокладання 11 000 км шосейних доріг. Чи зможе вона сполучити сіткою шосейних доріг усі свої міста?

1990 рік

7 клас

1. Як двома відрами місткістю 9 л та 4 л набрати з річки 6 л води?

2. Дві вантажівки одночасно виїхали із пункту A в пункт B. Перша з них половину витраченого часу їхала зі швидкістю 50 км/год, а другу половину — зі швидкістю 40 км/год. Друга — половину шляху зі швидкістю 50 км/год, а половину — зі швидкістю 40 км/год. Яка з них швидше прибула до пункту B?

3. Доведіть, що серед довільних 1990 цілих чисел знайдуться два, різниця яких ділиться на 1989.

4. На столі стоять три однакові ящики. В одному з них 2 чорні кульки, у другому — 2 білі, у третьому — 1 чорна та 1 біла. На ящиках про це зроблено відповідні надписи, але відомо, що жоден із них не відповідає дійсності. Як, вийнявши лише одну кульку, встановити, де які кульки знаходяться?

5. Доведіть, що для простих чисел $p>3$ число p^2-1 ділиться на 24.

8 клас

1. Усередині опуклого чотирикутника знайдіть точку, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

2. Дев'ять грибників зібрали 220 грибів, причому кожні два з них зібрали різну кількість грибів. Доведіть, що знайдуться п'ятеро грибників, які зібрали разом грибів не більше, ніж четверо інших.

3. Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину прямого кута з центром квадрата, побудованого зовні на гіпотенузі, ділить прямий кут навпіл. Виразіть довжину цього відрізка через катети трикутника.

4. Знайдіть суму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1989}+\sqrt{1990}}.$$

5. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^3-3y^3-9z^3=0$.

9 клас

1. 48 ковалів мають підкувати 60 коней. Який найменший час вони витратять на роботу, якщо кожен коваль витрачає на одну підкову 5 хвилин. (Урахуйте, що кінь стояти на двох ногах не може.)

2. Розв’яжіть рівняння

$$(x+1)^4+(x-3)^4=32.$$

3. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, центри вписаного та описаного кіл якого симетричні відносно основи трикутника.

4. Дано 1990 додатних чисел. Відомо, що добуток довільних 19 із них більший за одиницю. Доведіть, що і добуток довільних 90 із них теж більший за одиницю.

5. Доведіть, що якщо a, b — катети, c — гіпотенуза прямокутного трикутника, то

$$c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

10 клас

1. Уся площина пофарбована в два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, розташовані на відстані 1 м одна від одної.

2. Доведіть, що якщо p та n — прості числа, більші за 3, то p^2-n^2 ділиться на 24.

3. У трикутнику дві медіани m_a та m_b перпендикулярні. Обчисліть площу цього трикутника.

4. Розкладіть на множники вираз

$$x^4+1990x^2+1989x+1990.$$

5. Чи існує трикутник із висотами 24, 40 та 60 см?

11 клас

1. Уся площина пофарбована в два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки різного кольору, розташовані на відстані 1 м одна від одної.

2. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2=x^3-3x^2+2x, \\ x^2=y^3-3y^2+2y. \end{cases}$$

3. Середини сторін двох опуклих чотирикутників попарно збігаються. Доведіть, що площі цих чотирикутників рівні.

4. Розв’яжіть рівняння

$$\sin^2 x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=\cos^2 3x.$$

5. На площині дано 1990 точок і коло радіуса 1. Доведіть, що на колі знайдеться точка, сума відстаней від якої до заданих точок не менша від 1990.